

THESIS / THÈSE

DOCTOR OF SCIENCES

Mercury rigid rotation: long periods effects

D'Hoedt, Sandrine

Award date:
2007

Awarding institution:
University of Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



**FACULTES UNIVERSITAIRES
NOTRE-DAME DE LA PAIX NAMUR**

FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématique

La rotation rigide de Mercure : étude des effets à longues périodes

Dissertation présentée par

Sandrine D'Hoedt

pour l'obtention du grade
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Timoteo CARLETTI

Jacques HENRARD

Anne LEMAÎTRE (Promoteur)

Ugo LOCATELLI

Jean SOUCHAY

Septembre 2007

©Presses universitaires de Namur & Sandrine D'Hoedt
Rempart de la Vierge, 13
B-5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,
hors des limites restrictives prévues par la loi,
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN-13 : 978-2-87037-566-2
Dépôt légal : D / 2007 / 1881 / 30

Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix
Faculté des Sciences
rue de Bruxelles, 61, B-5000 Namur, Belgium

La rotation rigide de Mercure : étude des effets à longues périodes

par Sandrine D'Hoedt

Résumé : Dans le but de décrire la rotation résonante rigide de Mercure, différents modèles de rotation résonante de type 3 : 2 à deux et trois dimensions, moyennisés sur les courtes périodes et exprimés en formalisme hamiltonien sont proposés. Dans le premier modèle, l'axe de rotation de Mercure est confondu avec son plus petit axe d'inertie et la planète n'est soumise à l'action d'aucune force autre que celle de la gravitation. Le couplage de ces 2 degrés de liberté est mis en évidence. Un modèle à 3 degrés de liberté tenant compte de la dissociation de l'axe du moment angulaire et de l'axe de figure est ensuite présenté. Dans ces deux modèles, le développement du potentiel est limité à l'ordre 2 en excentricité. Afin d'estimer l'erreur commise par ce choix de troncature, les Hamiltoniens sont développés à des ordres plus élevés ; les nouveaux termes ainsi obtenus sont considérés comme des perturbations et traités à l'aide de la théorie de Lie. L'influence des autres planètes du Système Solaire est enfin étudiée en incluant, dans un premier temps, une précession constante du nœud ascendant et du péricentre dans notre modèle de base et, dans un second temps, en considérant que l'inclinaison et l'excentricité sont des fonctions lentes du temps permettant l'utilisation de la théorie de l'invariant adiabatique étendue à 2 degrés de liberté. Une étude des équilibres et des périodes propres de chaque modèle est réalisée.

Mercury rigid rotation : long periods effects

by Sandrine D'Hoedt

Abstract : In the aim to describe the Mercury's rigid resonant rotation, different 3 : 2 spin-orbit resonant rotation models with two and three dimensions , averaged on the short periods and expressed in Hamiltonian formalism is proposed. In the first model, Mercury's rotation axis and its smallest axis of inertia aren't distinct and no force except the gravitation one acts on the planet. The coupling between these 2 degrees of freedom is underlined. A 3 degrees of freedom model taking into account the dissociation of the angular momentum axis from the figure axis is afterwards presented. In these two models, the potential development is limited to the second order in eccentricity. In order to estimate the error due to this troncature choice, the Hamiltonians are developped up to higher orders ; the new terms so obtained are considered as perturbations et treated thanks to Lie theory. The influence of the other planets of the Solar System is finally studied by including, in a first time, a constant precession of the ascending node and of the pericenter in our basis model and, in a second time, by considering that the inclination and the excentricity are slow functions of time allowing the use of the adiabatique invariant extended to 2 degrees of freedom. A study of the equilibria and of the proper periods of each model is realized.

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)

Date : 26-09-2007

Département de Mathématique

Promoteur (Advisor) : Prof. A. LEMAÎTRE

Remerciements

Je tiens, tout d'abord à remercier mon promoteur, Anne Lemaître, pour avoir su déceler en moi une thésarde qui s'ignorait : décidée à faire une carrière dans l'enseignement, je ne me serais jamais crue capable de relever un tel défi sans sa motivation et son enthousiasme. Toujours prête à la discussion, ouverte à toute suggestion et généreuse en idées nouvelles, travailler sous sa direction a été, pour moi, une aventure aussi riche scientifiquement qu'humainement. Merci aussi, Anne, pour les longues heures de conversations, privées cette fois, que nous avons partagées en toute amitié au cours de ces neuf dernières années.

Je voudrais également adresser un merci tout particulier à Jacques Henrard, mon grand-père scientifique, qui n'a jamais hésité à s'investir dans mon sujet lorsqu'un problème épineux se présentait. Que ce soit après une entrevue à rebondissements, une remarque judicieuse ou un schéma de la marche à suivre rédigé, comme une évidence, en quelques secondes, c'est toujours avec disponibilité et bonne humeur qu'il a su répondre à toutes mes interrogations.

Mes remerciements vont ensuite à Alessandra Celletti et Corrado Falcolini pour nos échanges et nos rencontres très constructives au début de ma thèse ainsi qu'à Andrea Milani pour notre entretien à Pise. Merci aussi à Jean-Luc Simon pour nous avoir fourni des éphémérides.

Je remercie vivement les membres de mon Jury d'avoir bien voulu consacrer un peu de leur temps à la lecture et à la critique de mon manuscrit, ce qui l'a, sans conteste, grandement enrichi.

Les personnes suivantes sur ma longue liste de remerciements sont les secrétaires : Merci à Martine et Pascale pour leur dévouement et leur serviabilité.

Vient le tour de mes lecteurs/correcteurs, aussi complémentaires qu'intraitables, dont l'efficacité m'a été d'une aide précieuse. Merci donc, à Bernard, mon mari, pour ses remarques d'expert en la matière, sa curiosité me forçant à creuser l'un ou l'autre point de détail et sa vi-

sion d'ingénieur parfois trop abrupte pour ma sensibilité de mathématicienne mais néanmoins très éclairante. Merci aussi à Laetitia, mon amie et récemment collègue, de s'être gentiment proposée pour cette tâche quelque peu fastidieuse. Son insistance permanente pour rendre ce manuscrit plus lisible, plus fluide, a considérablement contribué à améliorer la qualité du texte.

Je tiens aussi à remercier spécialement trois de mes collègues : Julien pour ses éclaircissements sur la méthode du triangle de Lie et sa bonne humeur contagieuse. André pour nos réflexions à propos de l'une ou l'autre équation différentielle, pour nos discussions sur nos sujets respectifs et pour son amitié résistante aux frontières. Et Nicolas pour notre collaboration de longue date, à distance d'abord puis en qualité de cohabitant de bureau, pour sa motivation communicative mais également pour son amitié.

Mes remerciements s'adressent ensuite aux membres de l'équipe de Systèmes Dynamiques, anciens et actuels, pour la bonne ambiance qu'ils ont toujours entretenu au sein de l'unité.

Merci aussi à mes amis qui m'ont encouragée et soutenue tout au long de ces sept années : je pense notamment à Katia et Marilyn.

Merci à Sam, qui a subi avec le sourire les désagréments de mes horaires de chercheur en fin de thèse, pour sa spontanéité joviale et la confiance qu'il a su m'accorder.

Viennent à présent les personnes que de simples mots ne suffiront pas à remercier : mes parents pour leur soutien quotidien, leur écoute et leur disponibilité, ma sœur, ma confidente, pour sa présence et sa complicité ainsi que tous les membres de ma famille qui suivent mon parcours depuis le commencement.

Merci à Robin, mon fils, mon plus grand supporter, qui illumine ma vie depuis presque un an déjà.

Enfin, merci à mon mari, Bernard, pour le joyeux désordre qu'il s'applique à mettre dans ma vie, pour son humour et son enthousiasme débordant bref pour tout ce qui le rend aussi désarçonnant qu'indispensable.

Je dédie cette thèse à Bernard, à Robin et au(x) chérubin(s) à venir.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Paramètres de Mercure	13
1.2	Historique	15
1.3	Sommaire	23
2	Référentiels et variables	27
2.1	Systèmes de coordonnées	27
2.2	Variables canoniques	29
3	Bref rappel sur le Triangle de Lie	31
4	Formulation hamiltonienne : Premier modèle de rotation à 2 degrés de liberté sans perturbations planétaires	35
4.1	Expression générale de l'Hamiltonien	36
4.2	Développement du potentiel V_G : modèle simplifié à 2 degrés de liberté	37
4.3	Angle résonant	39
4.4	Hamiltonien simplifié	41
4.5	Petit modèle mathématique à 1 degré de liberté	42
4.6	Equilibres du modèle simplifié à 2 degrés de liberté	43
4.6.1	Parentèse sur les lois de Cassini Généralisées	46
4.6.2	Commensurabilité des nœuds	47
4.7	Stabilité des équilibres	48
4.8	Fréquence des deux variables angulaires	49
4.8.1	Passage aux coordonnées cartésiennes	49
4.8.2	Translation à l'équilibre	50
4.8.3	Elimination des termes croisés : "Untangling Transformation"	50
4.8.4	Changement d'échelle	51
4.8.5	Passage aux coordonnées angle-action	52

5	Modèle à 3 degrés de liberté	55
5.1	Hamiltonien simplifié à 3 degrés de liberté	55
5.2	Equilibres du modèle à 3 degrés de liberté	56
5.3	Stabilité des équilibres	59
5.4	Périodes du modèle à 3 degrés de liberté	59
6	Influence des autres planètes du Système Solaire	61
6.1	Introduction de la précession du nœud ascendant	61
6.1.1	Influence de Vénus et Jupiter	63
6.2	Introduction de la précession du péricentre	63
7	Mouvement résonant couplé : étude locale	65
7.1	Espace de phase	65
7.2	Slice cutting	66
7.3	Comportement adiabatique	67
7.4	Mouvement du deuxième degré de liberté	68
8	Développement à des ordres plus élevés en excentricité	71
8.1	Ordre 3 en excentricité	71
8.2	Ordre 4 en excentricité	73
9	Développement en séries de η_1, η_3, x_1 et x_3 de l'Hamiltonien aux ordres 3 et 4	75
9.1	Ordre 3	75
9.2	Ordre 4	77
10	e et i_o comme fonctions lentes du temps	81
10.1	Rappel théorique : l'invariant adiabatique	83
10.1.1	Paramètre indépendant du temps	83
10.1.2	Paramètre dépendant du temps	84
10.2	Application au cas de Mercure	86
10.2.1	Passage aux coordonnées cartésiennes	89
10.2.2	Translation à l'équilibre	89
10.2.3	Untangling Transformation	92
10.2.4	Changement d'échelle	95
10.3	Illustration numérique	98
11	Conclusion et perspectives	105

ANNEXES	107
A Calcul de l'énergie cinétique de rotation d'un corps homogène rigide	109
A.1 Energie cinétique de rotation	109
A.2 Quelques précisions au sujet des axes principaux d'inertie	110
B Calcul du potentiel du champ du gravité	111
C Deux des quatre équations du mouvement du modèle simplifié à 2 degrés de liberté	115
D Modèle à 3 degrés de liberté	119
E Modèle de pure rotation libre (Deprit, 1967) – valeur d'équilibre de l'angle J	131
F Expressions relatives à l'Hamiltonien développé au troisième ordre autour de l'équilibre du modèle de base	133
G Expressions relatives à l'Hamiltonien développé au quatrième ordre autour de l'équilibre du modèle de base	137
H Expression relative au modèle adiabatique	141
I Expression de α' et β' lorsque l'excentricité ou l'inclinaison sont des fonctions lentes du temps	143
Bibliographie	145

Notations principales

TAB. 1: Liste des symboles utilisés et valeurs typiques.

	Définition	Ref.	Note ou valeur	Unités
Opérateurs				
$\bar{\bullet}$	Moyennisé sur les variables angulaires (en coordonnées angle-action)	(3.4)		
$[\bullet; \bullet]$	Crochet de Poisson	(3.6)		
$\langle \bullet \rangle$	Moyenné sur les courtes périodes	(4.20)		
Variables et paramètres				
a	Demi grand-axe de l'orbite	(2.2)	$57.91 \cdot 10^6$	km
C_2^0	Coefficient zonal de degré 2	(4.3)	$C_2^0 = -0.6 \cdot 10^{-4}$	
C_2^2	Coefficient tesseral de degré 2	(4.3)	$C_2^2 = 0.1 \cdot 10^{-4}$	
e	Excentricité	(2.2)	$e = 0.206$	
\mathcal{G}	Constante de gravitation universelle	(2.2)		
g	Angle d'Euler formé par \vec{X}_2 et le nœud ascendant du plan équatorial de Mercure sur le plan normal à l'axe du moment angulaire. Variable d'Andoyer	FIG. 2.1	(g, J, l)	
G	Norme du moment angulaire. Variable d'Andoyer, moment conjugué à g	(2.3)		
g_o	Elément de Delaunay	(2.1)	$g_o = \omega_o = 29.12478^\circ$	
G_o	Elément de Delaunay, moment conjugué à g_o	(2.2)	$G_o = L_o \sqrt{1 - e^2}$	
G'_o	Nouveau moment conjugué à g_o	(4.26)	$G'_o = G_o + \Lambda_1$	
h	Angle d'Euler entre les axes \vec{X}_0 et \vec{X}_2 . Variable d'Andoyer	FIG. 2.1	$(h, K, -)$	
H	Variable d'Andoyer, moment conjugué à h	(2.3)	$H = G \cos K$	
h_o	Elément de Delaunay	(2.1)	$h_o = \Omega_o = 48.33^\circ$	
H_o	Elément de Delaunay, moment conjugué à h_o	(2.2)	$H_o = G_o \cos i_o$	
H'_o	Nouveau moment conjugué à h_o	(4.26)	$H'_o = H_o + \Lambda_1 - \Lambda_3$	
i_o	Inclinaison. Angle d'Euler formé par \vec{Z}_0 et \vec{Z}_1	FIG. 2.2	$i_o = 7^\circ$	
I_1, I_2, I_3	Moments d'inertie	(4.2)	$I_1 < I_2 < I_3$	
J	Angle d'Euler formé par \vec{Z}_2 et \vec{Z}_3	FIG. 2.1	(g, J, l)	
K	Obliquité écliptique. Angle d'Euler entre \vec{Z}_0 et \vec{Z}_2	FIG. 2.1	$(h, K, -)$	

suite à la page suivante

suite de la page précédente

	Définition	Ref.	Note ou valeur	Unités
l	Angle d'Euler formé par le nœud ascendant du plan équatorial de Mercure sur le plan normal à l'axe du moment angulaire et \vec{X}_3 . Variable d'Andoyer	FIG. 2.1	(g, J, l)	
L	Variable d'Andoyer, moment conjugué à l	(2.3)	$L = G \cos J$	
l_o	Anomalie moyenne. Élément de Delaunay	(2.1)		
L_o	Élément de Delaunay, moment conjugué à l_o	(2.2)	$L_o = m \sqrt{\mu a}$	
Λ_o	Nouveau moment conjugué à l_o	(4.19)	$\Lambda_o = L_o + \frac{3}{2}\Lambda_1$	
λ_1	$\lambda_1 = l + g + h$	(2.4)		
λ_2	$\lambda_2 = -l$	(2.5)		
λ_3	$\lambda_3 = -h$	(2.6)		
Λ_1	$\Lambda_1 = G$	(2.7)		
Λ_2	$\Lambda_2 = G - L$	(2.8)		
Λ_3	$\Lambda_3 = G - H$	(2.9)		
m	Masse de Mercure	(2.2)	$0.33 \cdot 10^{24}$	kg
M	Masse du Soleil	(2.2)	$6.0267 \cdot 10^6 \times m$	
μ	$\mu = \mathcal{G}(m + M)$	(2.2)		
R_e	Rayon équatorial	(4.3)	2440	km
σ	Angle résonant	(4.18)	$\sigma = \frac{2\lambda_1 - 3l_o}{2}$	
σ_1	Angle résonant	(4.25)	$\sigma_1 = \sigma - h_o - g_o$	
σ_3	Angle exprimant la commensurabilité des nœuds	(4.25)	$\sigma_3 = \lambda_3 + h_o$	
θ	Obliquité orbitale	(4.45)		
$(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$	Repère inertiel	FIG. 2.1	= repère écliptique	
$(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$	Repère orbital	FIG. 2.2		
$(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$	Repère lié au moment angulaire	FIG. 2.1		
$(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$	Repère formé par les axes principaux d'inertie	FIG. 2.1		
ω_o	Argument du péricentre. Angle d'Euler formé par le nœud ascendant du plan orbital sur le plan de l'écliptique et \vec{X}_1	FIG. 2.2	29.12°	
Ω_o	Longitude du nœud ascendant. Angle d'Euler formé par \vec{X}_0 et le nœud ascendant du plan orbital sur le plan de l'écliptique	FIG. 2.2	48.33°	

INTRODUCTION

1.1 Paramètres de Mercure

Mercure est sans doute l'une des planètes les plus mal connues de notre Système Solaire. Une des causes de cette méconnaissance vient certainement du fait que Mercure est la planète la plus proche du Soleil, ce qui rend difficile son observation (elle n'est visible à l'œil nu que juste après le coucher du Soleil, ou juste avant son lever). Il a donc fallu attendre les premières observations radar en 1965 et le lancement de la sonde Mariner 10 en 1974 avant d'avoir des informations fiables mais encore imprécises à son sujet. Les observations radar ont permis de mettre en évidence la particularité principale de Mercure : sa résonance 3 : 2 spin-orbite. En effet, Mercure est la seule planète du Système Solaire à parcourir deux fois son orbite dans le même temps qu'elle effectue trois rotations sur elle-même (voir Figure 1.1). Quant à Mariner

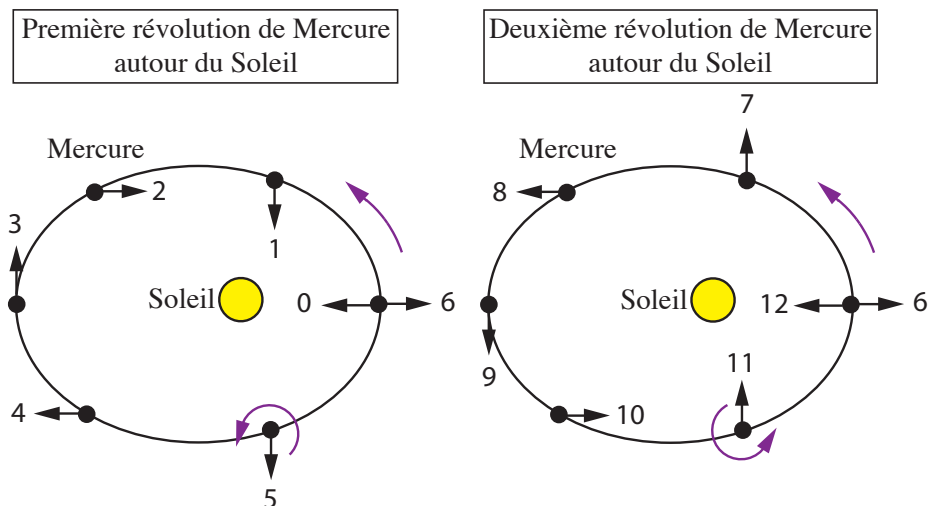


FIG. 1.1 – Représentation de la résonance spin-orbite de Mercure : Mercure parcourt deux fois son orbite dans le même temps qu'elle effectue trois rotations sur elle-même.

Paramètres	Mercure	Terre	Lune
Masse (10^{24} kg)	0.33	5.97	0.07
Rayon équatorial (km)	2440	6378	1738
Densité moyenne (kg/m ³)	5427	5515	3350
Gravité (m/s ²)	3.70	9.81	1.62
Champ magnétique (nT)	220	220000	0
Pression atmosphérique (bar)	10^{-15}	1	$3 \cdot 10^{-15}$
Période de rotation (jours)	58.65	1	27.32
Période orbitale (jours)	87.97	365.26	27.32
Demi grand-axe (10^6 km)	57.91	149.6	0.83
Excentricité	0.206	0.017	0.056
Inclinaison	7°	0°	5°
Longitude du périhélie	77.46°	102.95°	–
Longitude du nœud ascendant	48.33°	–	–

TAB. 1.1 – Tableau comparatif des paramètres géophysiques et orbitaux de Mercure, de la Terre et de la Lune

10, bien qu'elle n'ait pu photographier que 46% de la surface de Mercure, les images rapportées montrent notamment que la surface de Mercure est cratérisée, fort semblable à celle de la Lune. On a également pu déduire, à partir de cette mission, que le dipôle magnétique de Mercure est seulement un millième de celui de la Terre. En outre, Mercure est une planète assez hostile : sa température à l'équateur à midi atteint 430°C tandis que sur la face non éclairée, la température descend jusqu'à -176°C. Le Tableau (Tab. 1.1) reprend les principaux paramètres de Mercure, comparés à ceux de la Terre et de la Lune.

Toutefois, les agences spatiales américaine (NASA), européenne (ESA) et japonaise (ISAS) montrent depuis quelques années un vif regain d'intérêt à l'égard de Mercure. En effet, la NASA a procédé au lancement de la mission MESSENGER le 3 août 2004. Un premier survol est prévu pour le 14 janvier 2008 et l'arrivée pour le 18 mars 2011. La mission BepiColombo (ESA-ISAS), pour sa part, décollera en 2013 pour un voyage d'environ 6 ans. Quand elle arrivera sur Mercure en août 2019, elle devra endurer des températures de 350°C et récolter des données de septembre 2019 à septembre 2020, avec une extension possible d'un an. Ces missions, véritables défis technologiques, ont des buts à peu près semblables. En particulier, les objectifs de la mission BepiColombo (Milani et al., 2001) sont les suivants : comprendre l'origine

et l'évolution d'une planète proche de l'étoile "parent", étudier la forme, l'intérieur, la structure, la géologie, la composition et les cratères de Mercure, la composition et la dynamique de son atmosphère vestigiale, la structure et la dynamique de sa magnétosphère, l'origine de son champ magnétique et tester la théorie de la relativité générale d'Einstein. Toutes ces informations permettront non seulement de comprendre la planète elle-même mais aussi la formation du Système Solaire voire des éléments de physique fondamentale.

1.2 Historique

Très souvent comparée à la Lune, pour sa dimension et son aspect cratérisé, Mercure a longtemps fait les frais de cette similitude : toutes les théories tentant de modéliser sa rotation ou même sa structure interne étaient réalisées avec les paramètres de la Lune, ce qui donnait des résultats saugrenus ne collant pas avec la réalité. Par exemple, une importance capitale était accordée à la précession du nœud ascendant, perturbation principale pour la Lune, alors que pour Mercure, son influence est vraiment très faible comme nous le verrons dans la section 6.1.

Une série de modèles de rotation de Mercure existent néanmoins depuis 1965, année où Pettengill & Dyce (1965) obtiennent les premières observations radar de la rotation de Mercure : 59,5 jours (au lieu des 88 jours attendus pour une rotation synchrone) et où Colombo (1965) propose le premier modèle simplifié de la rotation de Mercure.

Colombo souligne le fait que cette valeur radar est très proche des 58.65 jours nécessaires pour obtenir une résonance 3 : 2 et que, dès lors, le mouvement de rotation uniforme décrit par Mercure pourrait être une solution périodique stable telle que l'axe de plus petit moment d'inertie soit presque aligné avec le rayon vecteur Soleil-Mercure à chaque passage au périhélie.

A sa suite, Goldreich & Peale (1966), vont creuser plus en avant les phénomènes de couplage spin-orbite dans le Système Solaire et tester, en particulier, leurs hypothèses sur Mercure (et la Lune). Ils considèrent que, pour atteindre un état résonant, les forces de marées doivent avoir ralenti la rotation de la planète. Toutefois ce freinage ne permet pas la capture dans une résonance particulière mais bien la traversée d'une série de résonances de type pn , où p est un multiple entier de $\frac{1}{2}$ et n est le moyen mouvement. Ils établissent ensuite que la stabilisation dans un état résonant particulier est liée à l'excentricité de l'orbite et à la triaxialité du corps (cette triaxialité pouvant être peu marquée : $(I_2 - I_1)/I_3 \simeq 10^{-8}$).

En 1967, Deprit (1967) propose une méthode permettant de réduire, au moyen d'une transformation canonique, l'Hamiltonien de la rotation libre d'un corps rigide à une fonction conservative à 1 degré de liberté. Pour ce faire, il utilise les variables d'Andoyer. Son modèle lui permettra d'affirmer que le moment angulaire d'une rotation libre est constant dans l'espace (voir section 4.6).

Peale (1969) considère une planète légèrement asphérique dont la vitesse angulaire de rotation est commensurable avec le mouvement orbital et qui précesse uniformément. Il choisit de travailler dans deux repères centrés au centre de masse de Mercure (un de ces repères est lié à l'orbite et l'autre aux axes de la planète). Son modèle de base, exprimé en formalisme hamiltonien, est constitué de trois termes : l'énergie cinétique de rotation, la précession et le potentiel dû au champ de gravité. Il moyennise l'expression ainsi obtenue sur les courtes périodes en prenant soin d'isoler l'angle quasi résonant $\psi = pM + q(\omega - \phi) + \gamma$ (où M est l'anomalie moyenne, p et q sont des demi-entiers, ω la longitude du péricentre, ϕ est la longitude du nœud du plan équatorial sur le plan orbital et γ une petite quantité forçant la non-résonance exacte) et la tronque en excentricité (voir sections 4.3 et 4.4). Il démontre ensuite, d'après les valeurs des paramètres de l'époque, que Mercure, bloqué dans sa résonance 3 : 2, vérifierait les lois généralisées de Cassini (l'axe du moment angulaire et la normale au plan orbital précèdent autour de la normale au plan de Laplace¹, ces trois axes restant alignés) et que son axe du moment angulaire serait actuellement dans l'état² de Cassini n°1 (voir section 4.6.1).

¹Quelques mots sur le plan de Laplace : le plan de Laplace est souvent mentionné dans les articles dédiés à la rotation de Mercure ; il est fréquemment présenté comme *le plan par rapport auquel les variations de l'inclinaison sont nulles ou minimales*, ce qui correspond à un mouvement orbital à précession constante. Il est ainsi dépendant des perturbations introduites dans le modèle et agissant à moyen ou long terme sur l'inclinaison. Il n'y a donc pas un plan de Laplace universel, ni même un par planète. On peut estimer sa position moyenne (par rapport à un référentiel donné) en la calculant sur base d'éphémérides planétaires plus ou moins sophistiquées. Si les données sont séculaires on parle en général simplement du Plan de Laplace, si les données sont limitées à des mouvements sur un millier d'années, on parlera de Plan de Laplace instantané, même si ce terme est un peu maladroit.

Il est clair que, sur la durée d'une mission spatiale (quelques années), le Plan de Laplace ne joue pas un rôle essentiel : tout plan par rapport auquel l'inclinaison est quasi constante est suffisant.

²Nous constatons une certaine confusion dans la littérature entre les *états* et les *équilibres* de Cassini ; dans le cadre de ce travail nous adopterons la convention suivante : l'état de Cassini est l'état physique dans lequel se trouve Mercure, si l'on fait l'hypothèse que les forces dissipatives ont supprimé toute libration libre ; cet état dépend donc des amplitudes et des fréquences des termes forcés (par les perturbations planétaires agissant sur l'orbite de Mercure).

L'équilibre de Cassini correspond aux valeurs des variables et des moments annulant les dérivées temporelles dans un modèle donné ; on peut espérer que si la modélisation est complète et bien pensée, l'équilibre soit une bonne représentation mathématique de l'état de Cassini ; néanmoins l'équilibre reste toujours dépendant des approximations, troncatures et simplifications du modèle considéré.

En 1974, Peale (1974) examine les différentes évolutions possibles de l'obliquité de Mercure. Il montre que deux ou quatre positions de l'axe du moment angulaire peuvent se présenter selon les valeurs des différents paramètres. La stabilité de la résonance 3 : 2 est aussi discutée en fonction de l'obliquité (l'issue de cette considération étant que Mercure ne peut être capturé en résonance que pour des valeurs de l'obliquité inférieures à 100°). Il obtient comme résultat que les forces de marée délogent toujours l'axe du moment angulaire de l'état de Cassini n°3 et que l'état le plus probable dans lequel Mercure doit se trouver est l'état de Cassini n°1 bien que la probabilité qu'il se soit retrouvé dans l'état n°2 soit non négligeable. De plus, si l'on considère que les éléments orbitaux varient lentement, on constate que l'angle solide décrit par l'axe du moment angulaire lors de sa précession autour de l'état de Cassini n°1 est un invariant adiabatique dans le sens qu'il reste presque constant ; ce n'est pas le cas pour l'état de Cassini n°2. Les systèmes de références nécessaires à cette étude sont un repère orbital, un repère lié aux axes principaux de Mercure et un repère lié au moment angulaire (voir chapitre 2). Tous les développements sont basés sur un modèle hamiltonien constitué de trois termes : l'énergie cinétique, le potentiel dû au champ de gravité et un terme incluant la précession du nœud du plan équatorial sur le plan orbital. Le potentiel est développé en série de Kaula (1966) et tronqué en excentricité. Un angle résonant est défini et l'Hamiltonien est moyennisé sur les courtes périodes (voir sections 4.2, 4.3 et 4.4). Des modèles de forces de marée sont enfin greffés sur le modèle de base.

Beletskii (1972) étudie parallèlement la rotation résonante de la Lune et de Mercure et en fait ressortir les différences principales. Il travaille avec trois systèmes d'axes : le repère orbital, un repère lié au moment angulaire et un repère lié aux moments principaux d'inertie. Son modèle est composé d'un terme dû à l'énergie cinétique de rotation, un terme incluant la précession (constante) du nœud ascendant et le potentiel tronqué en excentricité qu'il va moyenniser par rapport à l'anomalie moyenne (variable rapide). La précession du péricentre est également présente. Le modèle de Beletskii est un modèle à 3 degrés de liberté (voir chapitre 5). Il en calcule les équilibres et aboutit à un premier constat : la projection du plus grand axe d'inertie sur le plan orbital coïncide, au péricentre, avec la direction du rayon vecteur Soleil-Mercure et est perpendiculaire à ce rayon vecteur à l'apocentre (voir section 4.6.1). De plus, on revient à la direction initiale après deux périodes de révolution. En outre, comme confirmé par Peale (1974), il trouve deux ou quatre positions stationnaires pour l'axe du moment angulaire selon les valeurs des paramètres, ces positions sont respectivement stables ou composées de trois stables et une instable (voir Tableau 6.2). Il montre, ensuite, qu'elles vérifient les Lois de Cassini dans le cas de la Lune et les lois de Cassini généralisées dans le cas de Mercure. Son analyse lui permet d'établir des conditions de stabilité d'un mouvement résonant de type 3 : 2

dont les trois principales sont

1. l'excentricité doit être non nulle,
2. la rotation doit avoir lieu autour du plus petit axe d'inertie de l'ellipsoïde,
3. le plus grand axe d'inertie doit être, à chaque passage au péricentre, dans la direction du demi grand-axe orbital.

Au même moment, Kinoshita (1972) traite le problème général de deux corps rigides (un sphérique et un triaxial) perturbé au premier ordre à partir de quatre repères (écliptique, orbital, lié au moment angulaire et lié à la forme de l'ellipsoïde – voir chapitre 2). Il choisit comme variables, celles dites de Delaunay pour la partie orbitale et d'Andoyer pour la partie relative à la position du corps triaxial (voir chapitre 2). Afin de diminuer le nombre de degrés de liberté et de rendre son problème intégrable, il passera ensuite aux variables angle-action (voir chapitre 3). Son modèle est képlérien et il considère uniquement l'énergie cinétique de rotation, le potentiel issu du problème des deux corps et le potentiel dû au champ de gravité. Tout comme les auteurs précédents, un développement en série de l'excentricité est effectué. Pour éliminer les termes à courtes périodes, l'auteur utilise une transformation de Hori-Lie (voir chapitre 3).

Celletti (2002, communication privée) propose un éventail de modèles képlériens du plus simple au plus complexe : elle considère tantôt Mercure comme un corps dont l'équateur est circulaire, tantôt comme un ellipsoïde quelconque. Elle s'intéresse particulièrement aux cas de l'obliquité nulle et de la rotation principale (*i.e.* quand l'axe de rotation coïncide avec un axe physique). Une attention spéciale est portée sur les angles donc la fréquence est égale au rapport $\frac{3}{2}$.

Un des nouveaux points d'intérêt concernant Mercure est la connaissance de sa structure interne. Cet engouement est à mettre en rapport avec les nouvelles observations radar (Margot et al., 2003) et la perspective d'obtenir de nouvelles données grâce aux deux missions (MESSENGER et BepiColombo). Peale (1976, 2005) a montré que si l'on arrive à déterminer avec précision, l'obliquité de Mercure, l'amplitude de ses librations en longitude et la valeur des harmoniques sphériques J_2 et C_2^2 , on aura une bonne estimation de la nature et de la taille du noyau de Mercure grâce à la relation :

$$\left(\frac{C_m}{B - A} \right) \left(\frac{B - A}{M_M R^2} \right) \left(\frac{M_M R^2}{C} \right) = \frac{C_m}{C} \leq 1 \quad (1.1)$$

appelée “expérience de Peale” où M_M et R sont la masse et le rayon de Mercure, $A < B < C$ sont les moments principaux d'inertie et C_m est le moment d'inertie polaire du manteau seul.

Le premier facteur de cette relation peut être obtenu grâce à l’amplitude de la libration. Dans notre modèle, cela correspond à l’amplitude de l’effet de la période de 88 jours sur notre angle résonant σ ; on peut donc se servir de nos calculs (section 4.4) pour modéliser la variation temporelle de l’angle résonant, sous la forme simplifiée d’un oscillateur harmonique, forcé par les “courtes” périodes, celles de l’anomalie moyenne orbitale, de 88 jours. Il suffit de rajouter à notre mouvement moyen les termes éliminés par moyennisation, par le calcul du générateur de la transformation canonique, limité aux tout premiers coefficients ; en faisant ce calcul rapide, on montre que l’amplitude du terme dominant forcé est bien proportionnel à ce premier facteur. Le deuxième facteur est lié au C_2^2 dont on espère connaître la valeur (tout comme celle de C_2^0) grâce à l’orbite de la sonde (Messenger ou BepiColombo) ; en effet, ce n’est que par les équations aux variations sur l’orbite du satellite, que l’on pourra corriger leurs valeurs a priori. Le troisième facteur dépend de la valeur de l’obliquité de l’état de Cassini n°1 : en partant des équations d’équilibre (Cassini 1) de notre modèle à deux ou trois degrés de liberté associé à une précession constante de l’orbite de Mercure sur le plan de référence (voir chapitre 6) on arrive à exprimer, en première approximation, le troisième facteur comme une fonction du C_2^2 , du C_2^0 , de cette précession constante, du moyen mouvement, de l’excentricité et de l’inclinaison orbitale ; si l’on considère que l’on connaît toutes ces quantités et qu’elles ne varient pas trop au cours du temps, on arrive à une estimation de ce facteur. La nécessité de garder l’inclinaison quasi constante dans cette formule fait souvent privilégier à nouveau le Plan de Laplace comme référence ; cependant pour des périodes d’expérience courtes, et vu la connaissance encore vague que nous avons des paramètres de la rotation de Mercure, cela n’a pas vraiment d’importance. Notons, qu’étant donné que cette relation (1.1) fait intervenir les termes à courtes périodes, nous n’y reviendrons pas, notre modèle de base étant exclusivement centré sur les termes de moyennes périodes (entre 10 et 1000 ans) puis perturbé par de très longues périodes (10^5 ans).

Ces très longues périodes sont l’effet des autres planètes du Système Solaire qui induisent une variation séculaire des éléments orbitaux de Mercure (voir chapitre 10). Peale (2006) introduit cet effet sur l’excentricité e et l’inclinaison I . Il teste ainsi la propension qu’a l’axe du moment angulaire de Mercure à suivre l’état de Cassini dont la position est modifiée par l’évolution des éléments orbitaux. Dans son modèle, l’auteur fait les simplifications suivantes : la rotation a lieu autour de l’axe principal de plus grande inertie et le noyau de Mercure est considéré comme solide. La première de ces deux hypothèses implique que l’étude porte sur un seul degré de liberté. La lente dépendance en temps est traduite de manière adiabatique de la façon suivante :

$$I = I_0 + A_I \sin \frac{2\pi t}{P_I} \quad (1.2)$$

$$e = e_0 + A_e \sin \frac{2\pi t}{P_e} + \phi \quad (1.3)$$

où A_n est l'amplitude, P_n la période et ϕ un déphasage. Une des conclusions de cette analyse est que les variations en inclinaison ont beaucoup plus de poids que les variations en excentricité.

Yseboodt & Margot (2005) se sont, quant à eux, focalisés sur l'obliquité de Mercure. Leur but étant d'évaluer le plus précisément possible la valeur de l'obliquité de Mercure et son évolution temporelle afin de pouvoir déterminer la taille du noyau. A partir de notre Hamiltonien non perturbé moyennisé à 2 degrés de liberté (D'Hoedt & Lemaître, 2004), ils ont montré que l'axe du moment angulaire de Mercure se trouvait bien actuellement dans un état de Cassini. Or les autres planètes du Système Solaire provoquant une variation séculaire des éléments orbitaux, les auteurs ont mis au point différentes méthodes (numérique et analytique) permettant de déterminer un plan de Laplace qui minimise les variations de l'inclinaison. Leur étape suivante a été d'ajouter les perturbations planétaires au modèle hamiltonien de base. Ils ont démontré que si l'on prend les conditions initiales associées à l'état de Cassini, les perturbations planétaires n'excitent pas les modes propres de la rotation avec de larges amplitudes. Les planètes ont été introduites en supposant, au départ, leurs masses nulles et en les faisant augmenter lentement avec le temps, ce mécanisme permettant de maintenir l'axe du moment angulaire dans une position proche d'un état de Cassini instantané sans avoir recours à des processus dissipatifs.

Les observations radar de Margot et al. (2007) ont confirmé que Mercure se trouve actuellement dans un état de Cassini avec une obliquité de 2.11 ± 0.1 arcmin et que son moment angulaire de rotation subit des oscillations en longitude (appelées librations forcées) de 88 jours comme prédit par la théorie. De plus, les auteurs ont montré que les larges amplitudes de ces oscillations indiquent que le noyau serait au moins partiellement liquide.

Par ailleurs, la particularité de Mercure étant sa résonance spin-orbite, une série de modèles basés sur des résonances de type 1 : 1 puis 3 : 2 (cas de Mercure) à 1 degré de liberté, utilisant des théories très mathématiques permettant des approximations en assez bonne corrélation avec la réalité mais néanmoins limitées, ont été réalisés par plusieurs auteurs depuis le début des années 80. Ces travaux sont l'écho, appliqués au cas de Mercure, de travaux plus généraux sur les phénomènes de résonance (dont Henrard & Lemaître, 1983, Henrard & Murigande, 1987). Henrard & Lemaître (1983) ont, dans un premier temps, démontré qu'un système hamiltonien à 1 degré de liberté tenant compte des résonances est beaucoup plus représentatif des problèmes de la mécanique céleste qu'un pendule. Ils ont appelé ce type d'Hamiltonien "second modèle fondamental de résonance". Henrard & Murigande (1987) ont ensuite montré que le modèle de Colombo (1966) pouvait être une généralisation du second modèle de résonance. Le "Colom-

bo's top" (ainsi nommé par les auteurs) décrit le mouvement d'une planète aplatie présentant une symétrie axiale et telle que le nœud ascendant du plan équatorial sur le plan de l'écliptique précesse uniformément. En formalisme hamiltonien, le Colombo's Top s'écrit :

$$H_C = -\frac{1}{2}(Z - b)^2 - a\sqrt{1 - Z^2} \cos h \quad (1.4)$$

où, dans notre travail, $Z = \cos K$, $h = -\lambda_3$, $a = \frac{2}{3} \mu \sin i_o \frac{\Lambda_1}{n^2} \frac{1}{I_3 - I_1}$ et $b = \frac{2}{3} \mu \cos i_o \frac{\Lambda_1}{n^2} \frac{1}{I_3 - I_1}$ avec μ la précession constante du nœud.

Les équilibres de ce système (aussi appelés équilibres de Cassini, voir section 4.6.1) ont été calculés et discutés par les auteurs en fonction des paramètres a et b .

Ces modèles mathématiques sont actuellement encore affinés et engendrent des résultats de plus en plus performants. Parmi les auteurs à l'œuvre dans ce domaine, nous citerons : A. Celletti, C. Falcolini, L. Chierchia. Celletti (1990a, 1990b) et Celletti & Chierchia (1998) modélisent la rotation résonante de Mercure sous forme hamiltonienne. Pour ce faire, ils posent quatre hypothèses simplificatrices : i) l'orbite est képlérienne, ii) l'axe du moment angulaire est parallèle à l'axe de plus grande inertie (dans nos notations : $\vec{Z}_2 = \vec{Z}_3$ – voir chapitre 2), iii) l'axe du moment angulaire est perpendiculaire au plan orbital (dans nos notations : $\vec{Z}_2 = \vec{Z}_1$) et iv) les effets de marées et les perturbations dues aux autres planètes sont négligés (voir Figure 1.2) pour la représentation des hypothèses ii) et iii) dans nos jeux de variables).

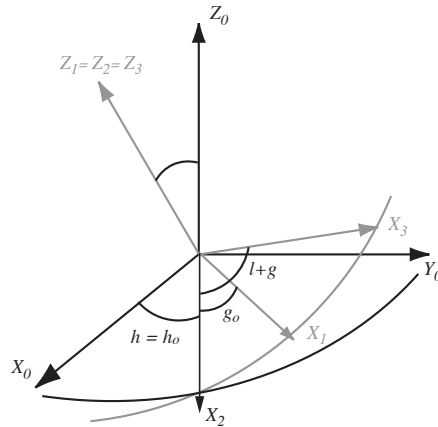


FIG. 1.2 – Représentation, dans nos jeux de variables, des hypothèses ii) et iii) posées par (Celletti, 1990a et 1990b) : $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2 = \vec{Z}_3$.

L'équation du mouvement ainsi obtenue est alors la suivante :

$$\ddot{x} + \frac{3}{2} \frac{I_2 - I_1}{I_3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \sin(2x - 2f) = 0 \quad (1.5)$$

où $I_1 < I_2 < I_3$ sont les moments principaux d'inertie, a le demi grand-axe, r le rayon orbital instantané, f l'anomalie vraie et où x , qui est le seul degré de liberté, est l'angle entre la direction du péricentre \vec{X}_1 et le plus long axe d'inertie \vec{X}_3 (dans nos variables, $x = l + g - g_o$). Cette expression est ensuite réécrite sous forme hamiltonienne.

Passée cette étape, ils utilisent le théorème KAM (dans sa version remaniée) afin de prouver la stabilité des orbites périodiques et la nécessité d'invoquer un mécanisme dissipatif pour justifier l'évolution d'un corps céleste vers un état synchrone ou une résonance 3 : 2. La recherche des tores invariants se fait à l'aide des sections de Poincaré et du critère de Green. Une étude similaire justifiant la résonance 3 : 2 de Mercure au détriment de la résonance 1 : 1 ou d'autres résonances mineures est réalisée dans Celletti & Falcolini (1991).

Deux autres approches de l'étude du comportement des résonances spin-orbite ont été réalisées par Celletti & Chierchia (2000). La première consiste à partir d'un modèle quasi-intégrable et à exprimer les orbites périodiques en fonction du paramètre perturbateur. Un développement en série de Taylor autour de ce paramètre est alors effectué. Le calcul du rayon de convergence de la série permet d'avoir des indications sur la stabilité des orbites périodiques et sur les différentes probabilités de capture. Ils prouvent ainsi que la résonance 3 : 2 apparaît seulement pour des excentricités assez élevées comme dans le cas de Mercure. Dans la deuxième approche, l'équation du mouvement est traduite sous forme d'un mapping, les valeurs propres de la matrice relative au système linéarisé sont calculées le long d'un cycle de l'orbite périodique afin d'en déterminer la stabilité. Les résultats obtenus confirment bien la présence de la résonance 1 : 1 pour de petites excentricités et 3 : 2 pour des excentricités plus élevées.

Dans notre travail, le modèle de base non perturbé considère que Mercure n'est soumis à l'action d'aucune force dissipative. Toutefois, un modèle complet permettant une explication la plus réaliste possible de la capture en résonance et du fait que Mercure se trouve dans l'état de Cassini n°1 devrait tenir compte la dissipation due à des facteurs externes. Parmi ceux-ci, les principaux sont l'effet de marée, la dissipation entre le noyau liquide et le manteau solide (Peale, 2005) et l'hypothèse d'un impact. Deux autres types de perturbations (non dissipatives, cette fois) à considérer sont la variation des éléments orbitaux due aux autres planètes du Système Solaire et le célèbre effet relativiste provoquant l'avance du périhélie de Mercure.

Un modèle d'impact complet pourrait être tiré du travail de Gauchez & Souchay (2006) qui propose une paramétrisation complète d'un impact sur un corps cible considéré comme ellipsoïdal. Cette paramétrisation leur permet d'analyser les changements induits sur la rotation de l'impacté, en particulier sur la vitesse de rotation et sur la direction de l'axe de rotation. Ils considèrent deux cas : l'accrétion et la cratérisation.

Concernant les effets de marées, Correia & Laskar (2004) utilisant également le modèle

(1.5), ont complété celui-ci par un terme de perturbation dû à un effet de marée visqueux, dépendant linéairement de la fréquence de marée. Cette considération permet un modèle plus réaliste et prend en compte l'évolution chaotique de Mercure. Ils ont ainsi montré que l'état le plus probable (55,4%) de Mercure est la résonance 3 : 2 sans avoir recours à un effet de friction noyau-manteau additionnel et à partir d'une période de rotation initiale de 20 jours (soit en régime de rotation lente). Ils ont de plus montré qu'au cours de son histoire, Mercure a très probablement atteint des excentricités allant jusqu'à 0.325.

Enfin, très récemment, Celletti et al. (2007), partant du modèle conservatif (1.5) sur lequel un terme de dissipation a été greffé, ont réalisé une étude basée d'une part sur l'analyse en fréquence et d'autre part sur le calcul de l'indicateur de Lyapunov maximum. Cette méthode consiste à calculer le plus grand exposant de Lyapunov en fonction de différents paramètres. Ces travaux ont mené à la conclusion attendue que les différents types de résonances sont liées à l'excentricité et au facteur de dissipation : ils montrent notamment que la résonance 3 : 2 atteint son occurrence maximum pour une excentricité de 0.2 et que la probabilité d'une capture en résonance croît avec l'augmentation de la dissipation.

1.3 Sommaire

Le but de ce travail est de construire un modèle analytique simplifié mais général de la rotation de Mercure à moyen et à long terme pouvant servir de base à différentes études (effets dissipatifs, courtes périodes, wobble, etc...).

Le premier chapitre met en place notre système de référentiels ; au nombre de quatre, ils permettent une description générale de l'orientation de la planète et de son orbite par rapport au plan de l'écliptique ainsi que de la position de la planète sur son orbite. Dans ce chapitre, nous définissons également nos variables : partis des variables classiques de Delaunay et d'Andoyer, nous avons transformé ces dernières en un jeu de variables canoniques partiellement non-singulier représentant de manière appropriée notre problème.

Notre modèle étant exprimé en formalisme hamiltonien, le deuxième chapitre est un rappel concernant une méthode permettant d'étudier aux différents ordres un Hamiltonien rendu intégrable d'étape en étape, exprimé en variables angle-action, soumis à l'action d'une petite perturbation. Cette méthode consiste à moyenniser l'Hamiltonien jusqu'à l'ordre voulu grâce à un procédé mnémotechnique appelé "Triangle de Lie", la dépendance en angle étant reléguée dans la fonction "reste".

Dans le chapitre 3, nous construisons notre modèle de base à 2 degrés de liberté. Dans ce modèle, Mercure est supposé être un corps rigide, ne subissant aucune force extérieure (hormis

l'action du Soleil), évoluant sur une orbite képlérienne et en rotation autour de son axe de plus grande inertie (comme souvent dans la littérature). Notre Hamiltonien est composé de trois termes : le potentiel dû au problème des deux corps, l'énergie cinétique de rotation et le potentiel dû au champ de gravité. Ce potentiel est tronqué au deuxième ordre en harmoniques sphériques (C_0^2 et C_2^2 étant les seules dont on ait une bonne estimation grâce à la mission Mariner 10 et aux observations radar), développé en série de l'excentricité et moyennisé sur les courtes périodes. L'angle (σ) exprimant la résonance spin-orbite 3 : 2 est défini comme nouvelle variable du problème (son moment lui est associé de sorte à préserver la canonicité du jeu de variables ainsi obtenu) :

$$\sigma = \frac{2\lambda_1 - 3l_o}{2} \quad (1.6)$$

où λ_1 est notre variable angulaire, toujours non singulière, qui tient compte de la rotation et l_o est l'anomalie moyenne et représente donc la révolution de Mercure autour du Soleil. L'Hamiltonien moyenné est ensuite tronqué à l'ordre 2 en excentricité et notre jeu de variables canoniques définitif $(\sigma_1, \sigma_3, \Lambda_1, \Lambda_3)$ (où σ_1 est associé à l'angle résonant) est mis en place. Les équilibres de ce modèle sont calculés et interprétés. Les valeurs d'équilibres de l'obliquité écliptique correspondant aux états de Cassini de l'axe du moment angulaire, une parenthèse, montrant que Mercure vérifie les lois de Cassini généralisées, est ouverte. En outre, comme il a été prouvé que Mercure se trouve actuellement dans l'état de Cassini n°1 (ou plus exactement à proximité de celui-ci), notre variable σ_3 peut être considérée comme un deuxième angle résonant (commensurabilité des nœuds). Une étude de la stabilité des équilibres est réalisée mais n'aboutit à une conclusion que pour trois des quatre équilibres. Après un passage en coordonnées cartésiennes et une translation à l'équilibre, l'Hamiltonien est développé en série de Mac Laurin à l'ordre 2 en les variables. Trois transformations canoniques successives (dans le but, respectivement, d'éliminer les termes croisés de l'Hamiltonien ainsi obtenu, d'associer à chaque variable et à son moment conjugué le même coefficient et de passer en coordonnées angle-action afin d'éliminer, dans ce modèle de base, les variables angulaires) sont ensuite appliquées et permettent de calculer les deux fréquences propres de notre système.

Dans le quatrième chapitre, nous généralisons notre modèle de base à un modèle à 3 degrés de liberté en considérant à présent que l'axe du moment angulaire et l'axe de plus grande inertie sont dissociés. Nous en recalculons les équilibres et les trois fréquences propres.

Deux perturbations sont ensuite appliquées à notre modèle dans le chapitre 5. La première est l'introduction d'une précession constante du nœud ascendant dû à l'action des planètes du Système Solaire. On constate que, contrairement à la Lune, cet effet est assez faible et introduit seulement une variation de quelques secondes d'arc sur les valeurs d'équilibre de l'obliquité écliptique ainsi qu'une variation de 3 ‰ de la troisième période propre. Une étude de l'effet des deux planètes principales (à savoir Vénus pour sa proximité de Mercure et Jupiter pour

sa taille) prises séparément ou ensemble est également proposée. La seconde perturbation est l'introduction d'une précession constante du péricentre ; nous avons montré que son influence est quasi négligeable.

Le chapitre suivant analyse le couplage existant entre les 2 degrés de liberté principaux σ_1 et σ_3 . Le premier agit comme une perturbation périodique rapide de faible amplitude sur le deuxième. Tandis, qu'à l'inverse, le deuxième peut être considéré comme une perturbation lente et adiabatique agissant sur le premier. Des méthodes différentes ont donc dû être implémentées pour étudier ces interactions.

Dans le chapitre 7, les termes d'ordre 3 et 4 en excentricité sont introduits comme perturbations. Leur effet respectif est étudié à l'aide de la méthode de Lie. Nous avons montré que l'influence des termes d'ordre 4 sur les périodes des variables angulaires est bien plus importante que celle des termes d'ordre 3.

Dans le chapitre 8, l'Hamiltonien exprimé en variables cartésiennes et translaté à l'équilibre est, cette fois, développé en série de Mac Laurin à l'ordre 3 puis 4 en les variables, les nouveaux termes obtenus étant considérés comme des perturbations du modèle de base. Après les trois transformations successives précitées (voir description du troisième chapitre), on obtient un Hamiltonien, formulé en variables angle-action, présentant une dépendance en angle. Une moyennisation jusqu'à l'ordre 2 à l'aide de la technique du Triangle de Lie, nous permet de conclure que ce sont les termes dépendant du premier degré de liberté qui influencent le plus les fréquences propres. L'effet des termes du troisième ordre sur les valeurs d'équilibre du moment angulaire, de l'obliquité écliptique et de l'angle entre l'axe du moment angulaire et le plus petit axe d'inertie est également étudié. La même démarche est effectuée pour les termes d'ordre 4.

Finalement, dans le chapitre 9, l'excentricité et l'inclinaison sont considérées comme des fonctions lentes du temps, ce qui est effectivement le cas lorsque que l'on prend en compte l'action des autres planètes du Système Solaire. La dépendance en temps ainsi introduite agit comme une petite perturbation et peut être étudiée grâce à la théorie de l'invariant adiabatique. L'effet de l'excentricité et de l'inclinaison est analysé pour chacune des quatre transformations précitées au travers de l'évaluation des fonctions "reste". On constate que l'inclinaison joue un rôle important dans la translation à l'équilibre et dans la transformation permettant l'élimination des termes croisés tandis que l'excentricité agit principalement dans la transformation visant à associer à chaque variable et à son moment conjugué le même coefficient. Une illustration numérique du caractère adiabatique de notre modèle est présentée dans la dernière section.

RÉFÉRENTIELS ET VARIABLES

Dans ce premier chapitre, nous allons poser les différents repères que nous avons choisis afin de modéliser au mieux et de façon la plus générale possible la rotation résonante de Mercure en tenant compte de sa triaxialité. Nous construirons ensuite nos jeux de variables canoniques partiellement non singuliers à partir des éléments de Delaunay et des variables d’Andoyer.

2.1 Systèmes de coordonnées

Contrairement à Belestkii (1972) et à Peale (1974) qui, dans leurs premiers papiers, ne considéraient que trois référentiels, le repère orbital étant pris comme repère inertiel, nous allons travailler, comme Kinoshita (1972), avec quatre systèmes de référence dont l’origine est fixée au centre de masse de Mercure (D’Hoedt & Lemaître, 2004). Ces repères sont les suivants :

- $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$, considéré comme le repère inertiel. Dans ce travail, nous le prendrons toujours comme étant lié au plan de l’écliptique fixé à une certaine époque avec \vec{X}_0 et \vec{Y}_0 dans ce plan et \vec{Z}_0 lui étant normal. Toutefois, une alternative tout aussi appropriée aurait été de choisir le plan de Laplace également fixé à une certaine époque.
- $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ avec \vec{Z}_2 orienté dans la direction de l’axe du moment angulaire et \vec{X}_2 dans la direction du nœud ascendant du plan équatorial sur le plan de l’écliptique.
- $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$ lié à la forme de Mercure, avec \vec{Z}_3 dans la direction de l’axe de plus grande inertie et \vec{X}_3 dans la direction de l’axe de plus petite inertie¹.
- $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ que nous appellerons repère orbital, avec \vec{Z}_1 normal au plan orbital et \vec{X}_1 dans la direction du péricentre.

¹Notons que l’axe de plus petite inertie est le plus grand axe de la figure et qu’inversément l’axe de plus grande inertie est le plus petit axe de la figure (voir Annexe A).

Les trois premiers repères sont liés entre eux par deux jeux d'angles d'Euler $(h, K, -)$ et (g, J, l) (voir Figure 2.1) où

- h est l'angle entre les axes \vec{X}_0 et \vec{X}_2 ,
- g l'angle entre \vec{X}_2 et le nœud ascendant du plan équatorial de l'ellipsoïde sur le plan normal à l'axe du moment angulaire,
- l l'angle formé par le nœud ascendant du plan équatorial de l'ellipsoïde sur le plan normal à l'axe du moment angulaire et l'axe \vec{X}_3 ,
- K l'angle entre \vec{Z}_0 et \vec{Z}_2 . Nous appellerons cet angle l'*obliquité écliptique* afin d'éviter toute confusion avec l'obliquité au sens habituel qui est l'angle entre le vecteur normal à l'orbite \vec{Z}_1 et l'axe du moment angulaire,
- J l'angle formé par \vec{Z}_2 et \vec{Z}_3 .

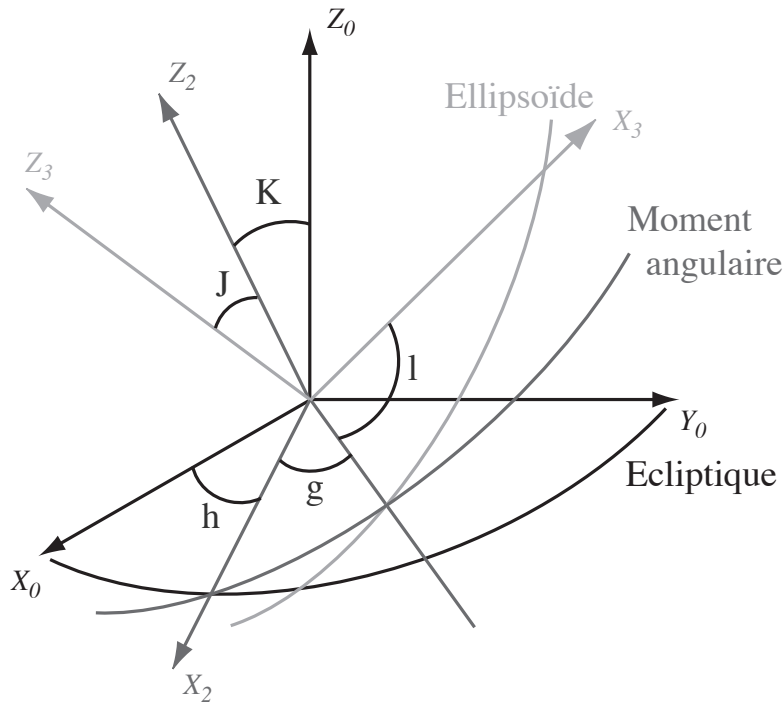


FIG. 2.1 – Les trois repères $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$, $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2, \vec{Z}_2)$ et $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$ centrés au centre de masse de Mercure où les deux premiers sont liés entre eux par le jeu d'angles d'Euler $(h, K, -)$ et les deux derniers par le jeu (g, J, l) .

Le repère orbital est lié au repère inertiel par un troisième jeu d'angles d'Euler $(\Omega_o, i_o, \omega_o)$ où l'indice "o" est utilisé pour "orbital". Dans cet ensemble d'angles, Ω_o est la longitude du nœud

ascendant, i_o est l'inclinaison et ω_o est l'argument du péricentre (voir Figure 2.2).

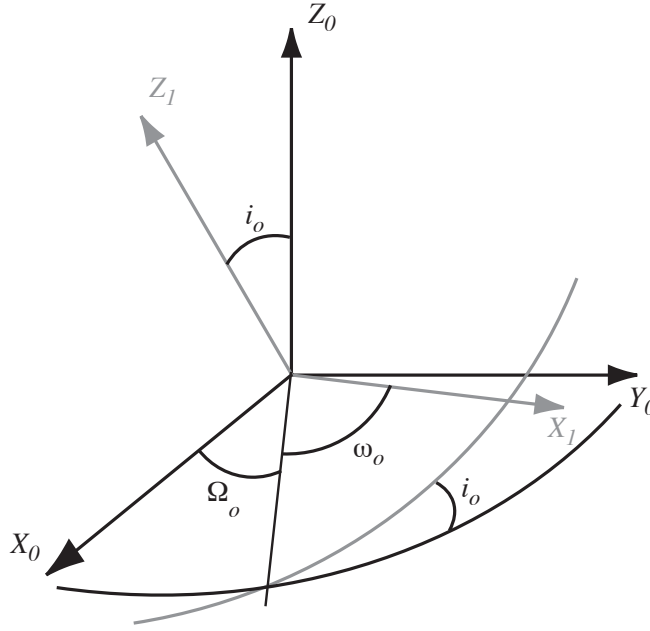


FIG. 2.2 – Le repère orbital $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$ centré au centre de masse de Mercure lié au repère inertiel $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ par les 3 angles d'Euler $(\Omega_o, i_o, \omega_o)$.

2.2 Variables canoniques

Pour décrire le mouvement de Mercure, nous avons besoin de deux jeux de variables : les orbitales et les rotationnelles.

Nous choisirons comme variables orbitales les éléments de Delaunay par rapport au plan de l'écliptique :

$$L_o, G_o, H_o, l_o, g_o, h_o. \quad (2.1)$$

Les lettres majuscules désignent les moments conjugués associés aux angles l_o (anomalie moyenne), $g_o = \omega_o$ et $h_o = \Omega_o$ et sont classiquement définis par :

$$L_o = m\sqrt{\mu a}, \quad G_o = L_o\sqrt{1 - e^2}, \quad H_o = G_o \cos i_o \quad (2.2)$$

où e est l'excentricité, a le demi grand-axe de l'orbite de Mercure, $\mu = \mathcal{G}(m + M)$ en première approximation avec \mathcal{G} la constante de gravitation universelle, m la masse de Mercure et M celle du Soleil.

Pour la rotation, comme Deprit (1967) et Kinoshita (1972), nous prendrons comme point de départ les variables d'Andoyer

$$L, G, H, l, g, h \quad (2.3)$$

où

- G est la norme du moment angulaire,
- $L = G \cos J$ est la projection du moment angulaire sur l'axe Z_3 et
- $H = G \cos K$ est la projection du moment angulaire sur l'axe Z_0 .

Le problème de ces variables d'Andoyer est que les variables angulaires ne sont pas bien définies si K et/ou J sont nuls. Toutefois, leur somme reste toujours bien définie, c'est pourquoi, nous allons choisir un nouveau jeu de variables partiellement non singulières $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où

$$\lambda_1 = l + g + h \quad (2.4)$$

$$\lambda_2 = -l \quad (2.5)$$

$$\lambda_3 = -h \quad (2.6)$$

$$\Lambda_1 = G \quad (2.7)$$

$$\Lambda_2 = G - L = G(1 - \cos J) \quad (2.8)$$

$$\Lambda_3 = G - H = G(1 - \cos K). \quad (2.9)$$

Notons que la transformation des variables d'Andoyer en nos nouvelles variables est une transformation canonique.

Pour les éléments orbitaux, un tel jeu non-singulier de variables, appelées “éléments de Delaunay modifiés”, existe aussi mais étant donné que ni l'excentricité ni l'inclinaison de Mercure ne sont proches de 0, il n'est pas utile d'effectuer cette transformation.

CHAPITRE 3

BREF RAPPEL SUR LE TRIANGLE DE LIE

Nous allons, à présent, parcourir rapidement les différentes étapes qui permettent de moyenniser, jusqu'à l'ordre voulu, un Hamiltonien intégrable soumis à l'action d'une petite perturbation.

Soit donc un Hamiltonien

$$\mathcal{H}(\alpha_i, A_i) = \mathcal{H}_0(\alpha_i, A_i) + \epsilon P(\alpha_i, A_i, \epsilon) \quad (3.1)$$

où $\mathcal{H}_0(\alpha_i, A_i)$ est un modèle de base intégrable avec α_i les variables angulaires et A_i leurs moments conjugués, ϵ un petit paramètre et $P(\alpha_i, A_i, \epsilon)$ une perturbation.

Une transformation normalisante des variables (α_i, A_i) en les variables angle-action (ψ_i, J_i) nous permettra d'obtenir un Hamiltonien transformé dont la première partie ne dépend plus des nouvelles variables angulaires ψ_i :

$$H(J_i, \psi_i) = H_0(J_i) + \epsilon \mathcal{P}(J_i, \psi_i, \epsilon). \quad (3.2)$$

L'Hamiltonien de base $H_0(J_i)$ ainsi obtenu est à présent intégré. En effet, en négligeant la perturbation, les nouvelles variables d'action seront constantes tandis que les nouvelles variables angulaires seront des fonctions linéaires du temps. Notons que la variable d'action J_i est proportionnelle à l'aire sous-tendue par l'orbite périodique fermée simple et non singulière obtenue pour une valeur h fixée de l'Hamiltonien dans le plan de phase (α_i, A_i) .

La moyennisation d'un Hamiltonien peut s'effectuer en utilisant la technique du "Triangle de Lie". Pour cela, exprimons notre Hamiltonien (3.2) de la manière suivante (en nous limitant à un seul degré de liberté) :

$$H(J, \psi) = H_0(J) + \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} H_i(J, \psi) \quad (3.3)$$

où les puissances de ϵ servent à hiérarchiser les différents termes de la perturbation et où H_0 ne dépend pas de l'angle sur lequel on cherche à moyenniser. Notons que, dans la suite de ce chapitre, ce que nous appellerons H_i^0 ne sera rien d'autre que le H_i de l'équation (3.3).

L'Hamiltonien moyenné complet (noté \bar{H}) s'écrit :

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\psi}) = \bar{H}(\bar{J}) + R(\bar{J}, \bar{\psi}) \quad (3.4)$$

avec

$$\bar{H}(\bar{J}) = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon^i}{i!} H_0^i(\bar{J}, -) \quad (3.5)$$

l'Hamiltonien moyenné tronqué (où les $H_0^i(\bar{J}, -)$ sont de nouvelles fonctions de \bar{J} uniquement) et $R(\bar{J}, \bar{\psi})$ une fonction “reste” dépendant encore de $\bar{\psi}$.

Les fonctions H_0^i sont obtenues par la formule de récurrence suivante :

$$H_n^i = H_{n+1}^{i-1} + \sum_{j=0}^n C_n^j [H_{n-j}^{i-1}; W_{j+1}] \quad (3.6)$$

où $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, $[;]$ est le crochet de Poisson¹ et W le générateur, également développé en puissances de ϵ :

$$W = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} W_{i+1}. \quad (3.7)$$

En outre, \bar{J} et $\bar{\psi}$ sont telles que

$$\begin{aligned} \dot{\bar{J}} &= O(\epsilon^{N+1}) \quad (\text{car les } H_0^i \text{ ne dépendent pas de } \bar{\psi}) \\ \Rightarrow \bar{J} &\simeq \text{cste} \quad (\text{jusqu'à l'ordre } N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{\partial H_0^0}{\partial \bar{J}} + \sum_{i \geq 1} \frac{\epsilon^i}{i!} \frac{\partial H_0^i}{\partial \bar{J}} = \omega + \sum_{i \geq 1} \frac{\epsilon^i}{i!} \frac{\partial H_0^i}{\partial \bar{J}} \quad (3.9)$$

avec ω la fréquence principale de $\bar{\psi}$.

La formule (3.6) peut être illustrée à l'aide du Triangle de Lie où un élément est obtenu à

¹La définition du crochet de Poisson à 1 degré de liberté est donnée par $[X; Y] = \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial Y}{\partial q}$ avec q la variable et p le moment.

partir de son voisin de gauche et de tous les éléments se trouvant au-dessus de ce dernier :

$$\begin{array}{cccccc}
 H_0^0 & & & & & \\
 H_1^0 & H_0^1 & & & & \\
 H_2^0 & H_1^1 & H_0^2 & & & \\
 H_3^0 & H_2^1 & H_1^2 & H_0^3 & & \\
 H_4^0 & H_3^1 & H_2^2 & H_1^3 & H_0^4 &
 \end{array} \tag{3.10}$$

Le terme H_0^0 du triangle est H_0 et les H_i^0 correspondent aux H_i .

Les formules pour calculer les premiers termes sont :

$$H_0^1 = H_1^0 + [H_0^0; W_1] \tag{3.11}$$

$$H_1^1 = H_2^0 + C_1^0[H_1^0; W_1] + [H_0^0; W_2] \tag{3.12}$$

$$H_0^2 = H_1^1 + [H_0^1; W_1] \tag{3.13}$$

$$H_2^1 = H_3^0 + C_2^0[H_2^0; W_1] + C_2^1[H_1^0; W_2] + [H_0^0; W_3] \tag{3.14}$$

$$H_1^2 = H_2^1 + C_1^0[H_1^1; W_1] + C_1^1[H_0^1; W_2] \tag{3.15}$$

$$H_0^3 = H_1^2 + [H_0^2; W_1]. \tag{3.16}$$

Remarquons qu'à l'ordre 1 (ligne 1), le générateur W_1 n'est pas connu ; à l'ordre 2, W_2 est inconnu et ainsi de suite. Toutefois, comme l'on construit les Hamiltoniens intermédiaires H_0^i de sorte à ce qu'ils soient indépendants de l'angle (ou des angles dans le cas d'un problème à plusieurs degrés de liberté) sur lequel on effectue la moyennisation, la connaissance du générateur W_i n'est pas nécessaire à l'ordre i et est donc calculé a posteriori (comme nous allons le voir ci-après).

Nous ne détaillerons ici que les deux premiers ordres (les seuls intervenant dans ce travail) et la méthode y afférant.

Pour le premier ordre, prenons donc H_0^1 comme étant la partie moyenne de H_1^0 , c'est-à-dire

$$H_0^1 = \int_0^{2\pi} H_1^0 d\psi \tag{3.17}$$

(ψ étant l'angle par rapport auquel on effectue la moyennisation). Cette intégrale est très facile à évaluer si l'Hamiltonien est développé en série de Poisson (3.3). Il suffit, en effet, de prendre tous les termes de H_1^0 qui ne dépendent pas de ψ et de les mettre dans H_0^1 . On peut donc ensuite

calculer le générateur W_1 grâce à l'équation homologique (3.11)

$$\underbrace{\frac{\partial H_0^0}{\partial J}}_{\omega} \frac{\partial W_1}{\partial \psi} = H_1^0 - H_0^1 \quad (3.18)$$

$$\Leftrightarrow W_1 = \frac{1}{\omega} \int (H_1^0 - H_0^1) d\psi \quad (3.19)$$

où $\omega (= \frac{\partial H_0^0}{\partial J})$ est la fréquence du problème non perturbé. W_1 est ainsi à présent connu, comme une fonction périodique en ψ .

Pour le deuxième ordre, nous calculons d'abord \tilde{H}_0^2 (le tilde se réfèrera toujours à un Hamiltonien provisoire, où le terme qui inclut le générateur de l'ordre courant n'est pas encore calculé) :

$$\tilde{H}_0^2 = H_2^0 + [H_1^0; W_1] + [H_0^1; W_1]. \quad (3.20)$$

On prend H_0^2 comme étant la partie moyenne de \tilde{H}_0^2 . Et, de la même manière que précédemment (éq. 3.19), avec

$$H_0^2 = \tilde{H}_0^2 + [H_0^0; W_2], \quad (3.21)$$

nous obtenons :

$$W_2 = \frac{1}{\omega} \int (\tilde{H}_0^2 - H_0^2) d\psi. \quad (3.22)$$

L'expression de l'Hamiltonien moyenné au 2ème ordre ainsi obtenu est donnée par

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\psi}) = H_0^0(\bar{J}) + \epsilon H_0^1(\bar{J}) + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2(\bar{J}) + \mathcal{R}(\bar{J}, \bar{\psi}) \quad (3.23)$$

où $\mathcal{R}(\bar{J}, \bar{\psi})$ est une fonction “reste” que nous négligerons, en général, étant d'ordre de ϵ^3 .

CHAPITRE 4

FORMULATION HAMILTONIENNE : PREMIER MODÈLE DE ROTATION À 2 DEGRÉS DE LIBERTÉ SANS PERTURBATIONS PLANÉTAIRES

Nous allons, dans ce chapitre, construire notre modèle de rotation résonante à 2 degrés de liberté. Nos hypothèses simplificatrices sont les suivantes : Mercure est un corps rigide, évoluant sur une orbite képlérienne et en rotation autour de son plus petit axe d'inertie (*i.e.* $J = 0$). Son mouvement n'est, de plus, soumis à l'action d'aucune force dissipative.

Notre but étant d'étudier les effets à moyennes et longues périodes, nous effectuerons une moyennisation de l'Hamiltonien du système sur les courtes périodes. En outre, la résonance spin-orbite 3 : 2 de Mercure étant sa caractéristique principale, nous créerons un nouveau jeu de variables canoniques basé sur cette particularité.

Nous calculerons ensuite les équilibres de ce modèle et leur stabilité. En chemin, nous montrerons que l'équilibre correspondant à la situation actuelle de Mercure vérifie les lois de Cassini généralisées et que nous sommes, en fait, en présence d'une double résonance : la résonance 3 : 2 modélisée par le premier degré de liberté et la commensurabilité des nœuds (de type 1 : 1) modélisée par le deuxième degré de liberté.

Finalement, après plusieurs transformations canoniques, nous exprimerons notre Hamiltonien en coordonnées angle-action ce qui nous permettra d'obtenir les fréquences propres de nos 2 degrés de liberté.

4.1 Expression générale de l'Hamiltonien

Supposons donc que Mercure est un corps rigide qui évolue sur une orbite elliptique fixée avec les paramètres orbitaux actuels :

$$a = 57.9 \times 10^6 \text{ km}, \quad e_o = 0.206, \quad i_o = 7^\circ.$$

Sans perturbation planétaire, l'Hamiltonien du problème peut être écrit :

$$\mathcal{H} = -\frac{m^3 \mu^2}{2L_o^2} + T(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + V_G(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.1)$$

où

- le premier terme est l'énergie potentielle du problème des deux corps,
- $T(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est l'énergie cinétique de rotation et
- $V_G(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le potentiel du champ de gravité.

On peut montrer (Deprit, 1967) que

$$T = \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2I_3} + \frac{1}{2}(\Lambda_1^2 - (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2) \left(\frac{\sin^2 \lambda_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_2}{I_2} \right) \quad (4.2)$$

où I_1, I_2, I_3 sont les moments d'inertie de la planète avec $I_1 < I_2 < I_3$ (voir Annexe A).

Comme Peale (1974) et d'autres auteurs (Beletskii, 1972 ou Burns, 1979), et parce que seulement très peu de données sont connues à propos de Mercure, nous limiterons le développement de V_G au second ordre en harmoniques sphériques, les autres ordres étant considérés comme des perturbations sur le modèle de base :

$$V_G = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r} \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 [C_2^0 P_2(\sin \theta) + C_2^2 P_2^2(\sin \theta) \cos 2\varphi] \quad (4.3)$$

où C_2^0 et C_2^2 ont pour expression :

$$C_2^0 = \frac{I_1 + I_2 - 2I_3}{2} \quad (4.4)$$

$$C_2^2 = \frac{I_2 - I_1}{4}, \quad (4.5)$$

P_2 est le polynôme de Legendre de second ordre

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

P_2^2 le polynôme de Legendre associé de second ordre

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2),$$

R_e le rayon équatorial de Mercure, r la distance entre les centres de masses de Mercure et du Soleil, θ et φ désignent respectivement la latitude et la longitude du Soleil dans le repère lié aux axes principaux d'inertie de Mercure ($\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3$) (voir Annexe B pour le détail du calcul).

4.2 Développement du potentiel V_G : modèle simplifié à 2 degrés de liberté

Exprimons à présent, V_G en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \bar{x}_3 = \cos \varphi \cos \theta \\ \bar{y}_3 = \sin \varphi \cos \theta \\ \bar{z}_3 = \sin \theta \end{cases}$$

où $(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ est le vecteur unité dans la direction du corps perturbateur (ici le Soleil). L'indice "3" est utilisé pour rappeler que nous travaillons dans le repère $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$.

Dès lors, en remplaçant les polynômes de Legendre par leur expression, nous obtenons :

$$V_G = -\frac{\mathcal{G}Mm}{r^3}(R_e)^2 \left[\frac{C_2^0}{2} (2\bar{z}_3^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2) + 3C_2^2 (\bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2) \right]. \quad (4.6)$$

Toutefois, notre but étant d'écrire le potentiel dans les variables rotationnelles $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et orbitales $(L_o, G_o, H_o, l_o, g_o, h_o)$, nous devons exprimer le vecteur unité $(\bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)$ dans le repère orbital $(\vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1)$:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix} = R_3(l)R_1(J)R_3(g)R_1(K)R_3(h) \times R_3(-h_o)R_1(-i_o)R_3(-g_o) \begin{pmatrix} \cos v_o \\ \sin v_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

$$= R_3(-\lambda_2)R_1(J)R_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)R_1(K)R_3(-\lambda_3) \times R_3(-h_o)R_1(-i_o)R_3(-g_o) \begin{pmatrix} \cos v_o \\ \sin v_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

où v_o est l'anomalie vraie et R_i les matrices de rotation (les indices indiquent l'axe autour duquel la rotation est effectuée).

Supposons à présent que $J = 0$, ce qui signifie que l'axe du moment angulaire \vec{Z}_2 et le troisième axe principal d'inertie \vec{Z}_3 coïncide. Cette supposition très proche de la réalité est fréquemment utilisée dans la littérature (Peale, 1974). Remarquons que, dans ce cas, les angles l et g ne sont plus bien définis mais que leur somme l'est toujours. Le changement de coordonnées devient :

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{z}_3 \end{pmatrix} = R_3(l+g)R_1(K)R_3(h)R_3(-h_o)R_1(-i_o)R_3(-g_o) \begin{pmatrix} \cos v_o \\ \sin v_o \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$= R_3(\lambda_1 + \lambda_3)R_1(K)R_3(-\lambda_3) \times \\ R_3(-h_o)R_1(-i_o)R_3(-g_o) \begin{pmatrix} \cos v_o \\ \sin v_o \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Réécrivons maintenant l'équation (4.6) de manière à faire apparaître $\frac{a^3}{r^3}$:

$$V_G = -\frac{\mathcal{G}Mm}{a^3} \frac{a^3}{r^3} (R_e)^2 \left[\frac{C_2^0}{2} (2\bar{z}_3^2 - \bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2) + 3C_2^2 (\bar{x}_3^2 - \bar{y}_3^2) \right]. \quad (4.11)$$

Ainsi, en utilisant la relation

$$L_o = m\sqrt{\mu a} \quad (4.12)$$

et les habituels développements en excentricité jusqu'à l'ordre 3 (Brouwer & Clemence, 1961) :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + \left(-e + \frac{3}{8}e^3\right) \cos l_o - \frac{1}{2}e^2 \cos 2l_o - \frac{3}{8}e^3 \cos 3l_o \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos v_0 &= -\frac{3}{2}e + \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right) \cos l_o + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3\right) \cos 2l_o + \frac{3}{8}e^2 \cos 3l_o \\ &\quad + \frac{1}{3}e^3 \cos 4l_o \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \sin v_0 &= \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right) \sin l_o + \left(\frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3\right) \sin 2l_o + \frac{3}{8}e^2 \sin 3l_o \\ &\quad + \frac{1}{3}e^3 \sin 4l_o, \end{aligned} \quad (4.15)$$

nous parvenons à introduire les deux variables orbitales manquantes l_o et L_o dans l'expression du potentiel V_G , qui s'écrit, en remplaçant (4.10) dans (4.11) :

$$\begin{aligned}
V_G = & -\frac{\mathcal{G}Mm}{L_o^6} \mu^3 (R_e)^2 \times \\
& \left\{ C_2^0 \left[a_{000} + \sum_{i=1}^5 a_{00i} \cos(i l_o) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=-5}^5 a_{0ji} \cos(j \lambda_3 + i l_o) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=1}^5 b_{00i} \sin(i l_o) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=-5}^5 b_{0ji} \sin(j \lambda_3 + i l_o) \right] \right. \\
& + 3C_2^2 \left[\sum_{i=-5}^5 a_{20i} \cos(2\lambda_1 + i l_o) + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=-5}^5 a_{2ji} \cos(2\lambda_1 + j \lambda_3 + i l_o) \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{i=-5}^5 b_{20i} \sin(2\lambda_1 + i l_o) + \sum_{j=1}^4 \sum_{i=-5}^5 b_{2ji} \sin(2\lambda_1 + j \lambda_3 + i l_o) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

où les coefficients a_{lmn} et b_{lmn} dépendent de K, h_o, i_o, g_o et e (les quatre derniers paramètres étant considérés comme constants dans cette partie du travail) avec l, m et n les coefficients de λ_1, λ_3 et l_o respectivement¹. Le modèle de base ainsi obtenu est donc fonction de seulement trois moments (Λ_1, Λ_3 au travers de K, L_o) et trois variables (λ_1, λ_3 et l_o).

4.3 Angle résonant

Comme nous l'avons déjà dit, Mercure se trouve en résonance spin-orbite de type 3 : 2. Ce qui signifie que le temps qui lui est nécessaire pour effectuer deux révolutions autour du Soleil est quasi égal à celui qu'il met pour effectuer trois rotations sur lui-même. Ce phénomène peut s'exprimer dans nos variables par

$$\dot{\lambda}_1 \simeq \frac{3}{2} \dot{l}_o. \tag{4.17}$$

Les deux ensembles de variables canoniques (orbitales et rotationnelles) sont ainsi liés dans cette commensurabilité.

Définissons donc

$$\sigma = \frac{2\lambda_1 - 3l_o}{2} \tag{4.18}$$

comme étant l'angle résonant² et conservons Λ_1 comme étant son moment conjugué. Afin de

¹Le développement complet, mais néanmoins réduit au maximum, de cette formule fait plusieurs dizaines de pages et n'est donc pas donné.

²Il est à noter que la transformation permettant de passer de nos anciennes variables (l_o, λ_1) à nos nouvelles variables (l_o, σ) n'est pas unimodulaire vu que les éléments de la matrice de transformation doivent tous être entiers, ce qui n'est pas le cas ici de par la présence du coefficient $\frac{3}{2}$ dans l'expression de σ . Toutefois, ceci ne portera pas à conséquence dans la suite de ce travail étant donné que ce coefficient porte sur l'anomalie moyenne qui n'est pas une de nos variables internes de la rotation et n'interviendra donc plus directement dans nos calculs.

garder une transformation canonique, nous devons associer à l_o un nouveau moment conjugué :

$$\Lambda_o = L_o + \frac{3}{2} \Lambda_1. \quad (4.19)$$

En effet, une condition suffisante pour qu'une transformation soit canonique est qu'il y ait conservation de la forme différentielle. Dès lors, pour passer des variables $(l_o, \lambda_1, L_o, \Lambda_1)$ aux variables $(l_o, \sigma, \Lambda_o, \Lambda_1)$ en conservant Λ_1 comme moment associé à σ , nous devons vérifier la relation suivante :

$$\begin{aligned} d\lambda_1 \Lambda_1 + dl_o L_o &= d\sigma \Lambda_1 + dl_o \Lambda_o \\ &= d\left(\frac{2\lambda_1 - 3l_o}{2}\right) \Lambda_1 + dl_o \Lambda_o \\ &= d\lambda_1 \Lambda_1 - \frac{3}{2} dl_o \Lambda_1 + dl_o \Lambda_o \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\Lambda_o = L_o + \frac{3}{2} \Lambda_1.$$

Si nous substituons dans (4.16) les anciennes variables par ces nouvelles variables, nous obtenons après moyennisation sur les courtes périodes :

$$\begin{aligned} \langle V_G \rangle &= -\frac{\mathcal{G} M m^7}{(\Lambda_o - \frac{3}{2} \Lambda_1)^6} \mu^3 (R_e)^2 \times \\ &\quad \left[\frac{1}{2} C_2^0 a_{000} + 3 C_2^2 \left(a_{200} \cos 2\sigma + b_{200} \sin 2\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=1}^4 (a_{2k0} \cos (2\sigma + k\lambda_3) + b_{2k0} \sin (2\sigma + k\lambda_3)) \right) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

où $\langle \rangle$ signifie “moyennisé sur les courtes périodes”. La forme développée de $\langle V_G \rangle$ est :

$$\langle V_G \rangle = -\frac{\mathcal{G} M m^7}{(\Lambda_o - \frac{3}{2} \Lambda_1)^6} \mu^3 (R_e)^2 \left(\frac{1}{2} C_2^0 \gamma_1 + 3 C_2^2 \gamma_2 \right) \quad (4.21)$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) \left[-\frac{1}{4} \left(-1 + 3 \cos i_o^2 \right) \left(-1 + 3 \cos^2 K \right) \right. \\ &\quad \left. - 3 \cos i_o \cos K \cos(h_o + \lambda_3) \sin i_o \sin K \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \left(1 - \cos^2 i_o \right) \left(1 - \cos^2 K \cos K \right) \cos(2h_o + 2\lambda_3) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_2 = & \frac{1}{16} \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) (1 - \cos i_o)^2 (1 - \cos K)^2 \cos(2h_o + 4\lambda_3 + 2\sigma - 2g_o) \\
& + \frac{53e^3}{128} (1 - \cos K)^2 \sin^2 i_o \cos(2h_o + 4\lambda_3 + 2\sigma) \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) (1 - \cos i_o) (1 - \cos K) \sin i_o \sin K \\
& \quad \times \cos(h_o + 3\lambda_3 + 2\sigma - 2g_o) \\
& + \frac{53e^3}{32} \cos i_o (1 - \cos K) \sin i_o \sin K \cos(h_o + 3\lambda_3 + 2\sigma) \\
& + \frac{3}{8} \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) \sin^2 i_o \sin^2 K \cos(2\lambda_3 + 2\sigma - 2g_o) \\
& + \frac{53e^3}{64} (2 - 3 \sin^2 i_o) \sin^2 K \cos(2\lambda_3 + 2\sigma) \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) (1 + \cos i_o) (1 + \cos K) \sin i_o \sin K \\
& \quad \times \cos(h_o - \lambda_3 - 2\sigma + 2g_o) \\
& - \frac{53e^3}{32} \cos i_o (1 + \cos K) \sin i_o \sin K \cos(h_o - \lambda_3 - 2\sigma) \\
& + \frac{1}{16} \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) (1 + \cos i_o)^2 (1 + \cos K)^2 \cos(2h_o - 2\sigma + 2g_o) \\
& + \frac{53e^3}{128} (1 + \cos K)^2 \sin^2 i_o \cos(2h_o - 2\sigma). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

4.4 Hamiltonien simplifié

Etant donné que l'excentricité e de Mercure est d'environ 0.206, nous allons seulement garder les termes en $\left(1 + \frac{3e^2}{2}\right)$ et $\left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16}\right)$ mais pas en e^3 seul ; ces termes seront à inclure comme perturbation du modèle simplifié.

L'Hamiltonien ainsi obtenu s'écrit :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H} \rangle = & -\frac{m^3 \mu^2}{2 \left(\Lambda_o - \frac{3\Lambda_1}{2} \right)^2} + \frac{\Lambda_1^2}{2I_3} - \frac{\mathcal{G} M m^7 \mu^3 R_e^2}{(\Lambda_o - \frac{3}{2}\Lambda_1)^6} \\
& \times \left[\frac{1}{2} C_2^0 \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{4} \left(-1 + 3 \cos^2 i_o \right) \left(-1 + 3 \cos^2 K \right) \right. \right. \\
& - 3 \cos i_o \cos K \cos(\sigma_3) \sin i_o \sin K \\
& - \frac{3}{4} \left(1 - \cos^2 i_o \right) \left(1 - \cos^2 K \right) \cos(2\sigma_3) \Big) \\
& + 3 C_2^2 \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right) \left(\frac{1}{16} \left(1 - \cos i_o \right)^2 \left(1 - \cos K \right)^2 \right. \\
& \quad \times \cos(2\sigma_1 + 4\sigma_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} (1 - \cos i_o) (1 - \cos K) \sin i_o \sin K \cos(2\sigma_1 + 3\sigma_3) \\
& + \frac{3}{8} \sin^2 i_o \sin^2 K \cos(2\sigma_1 + 2\sigma_3) \\
& + \frac{1}{4} (1 + \cos i_o) (1 + \cos K) \sin i_o \sin K \cos(2\sigma_1 + \sigma_3) \\
& + \frac{1}{16} (1 + \cos i_o)^2 (1 + \cos K)^2 \cos(2\sigma_1) \Big] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

avec

$$\sigma_1 = \sigma - h_o - g_o, \quad \sigma_3 = \lambda_3 + h_o. \quad (4.25)$$

Comme, cette fois encore, nous désirons garder Λ_1 et Λ_3 comme moments conjugués associés à σ_1 et σ_3 , nous devons associer à h_o et g_o de nouveaux moments conjugués H'_o et G'_o afin que la transformation reste canonique :

$$H'_o = H_o + \Lambda_1 - \Lambda_3, \quad G'_o = G_o + \Lambda_1. \quad (4.26)$$

4.5 Petit modèle mathématique à 1 degré de liberté

Nous ouvrons ici une parenthèse pour montrer que si nous supposons que l'inclinaison de l'orbite de Mercure est nulle, nous obtenons un modèle très réduit à 1 seul degré de liberté :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{H}_1 \rangle &= \frac{\Lambda_1^2}{2 I_3} - \frac{m^3 \mu^2}{2 (\Lambda_0 - \frac{3}{2} \Lambda_1)^2} - \frac{\mathcal{G} M m^7 \mu^3 R_e^2}{(\Lambda_0 - \frac{3}{2} \Lambda_1)^6} \\
&\times \left[\frac{1}{2} C_2^0 \left(\frac{1}{2} (1 + \frac{3}{2} e^2) - \frac{3}{2} (1 + \frac{3}{2} e^2) \cos^2 K \right) \right. \\
&+ 3 C_2^2 \left(\frac{1}{4} (\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3) \cos(2\sigma_1) + \frac{1}{2} (\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3) \cos K \cos(2\sigma_1) \right. \\
&\left. \left. + \frac{1}{4} (\frac{7}{2} e - \frac{123}{16} e^3) \cos^2 K \cos(2\sigma_1) \right) \right] \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Ce modèle est déjà très utile car il peut servir de première approximation pour diverses études.

De plus, ce modèle pouvant aisément se ramener à un modèle pendulaire dont l'expression typique est

$$H = \frac{1}{2} p^2 - b \cos q$$

avec p le moment et q la variable, sa dynamique est parfaitement connue.

4.6 Equilibres du modèle simplifié à 2 degrés de liberté

Calculons à présent les équations du mouvement :

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\Lambda_1} = \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial\Lambda_1} + \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos K)} \frac{\partial(\cos K)}{\partial\Lambda_1} \quad (4.28)$$

$$\dot{\sigma}_3 = \frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\Lambda_3} = \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos K)} \frac{\partial(\cos K)}{\partial\Lambda_3} \quad (4.29)$$

$$\dot{\Lambda}_1 = -\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\sigma_1} = \sum_{i=0}^4 d_i \sin(2\sigma_1 + i\sigma_3) \quad (4.30)$$

$$\dot{\Lambda}_3 = -\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\sigma_3} = \sum_{i=1}^2 d'_i \sin(i\sigma_3) + \sum_{i=1}^4 d''_i \sin(2\sigma_1 + i\sigma_3), \quad (4.31)$$

où les coefficients d_i , d'_i et d''_i dépendent de i_o , K et e . (Voir Annexe C pour les expressions des deux dernières équations).

Afin de calculer les équilibres du problème, nous devons annuler chacun des membres de droite des équations et résoudre le système ainsi obtenu.

Les équations (4.30) et (4.31) nous fournissent quatre couples de valeurs pour (σ_1, σ_3) à l'équilibre :

$$(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0), (\pi/2, 0), (0, \pi), (\pi/2, \pi). \quad (4.32)$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système composé des équations (4.28) et (4.29).

Or par (2.9),

$$\cos K = 1 - \frac{\Lambda_3}{\Lambda_1}. \quad (4.33)$$

Dès lors,

$$\frac{\partial(\cos K)}{\partial\Lambda_3} = -\frac{1}{\Lambda_1}. \quad (4.34)$$

Les expressions (4.29) et (4.28) égalées à 0 peuvent donc être réécrite respectivement de la façon suivante :

$$\frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos K)} = 0 \quad (4.35)$$

et

$$\frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial\Lambda_1} = 0. \quad (4.36)$$

Nous pouvons maintenant résoudre l'équation (4.35) pour les deux couples (σ_1, σ_3) significatifs afin de trouver les différentes valeurs de l'obliquité éclipique K à l'équilibre.

Pour le cas $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$, nous trouvons

$$\sin(i_o - K) = 0 \quad \text{ou} \quad (4.37)$$

$$\sin(i_o - K) = \frac{C_2^2 \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right)}{C_2^0 \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) - C_2^2 \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right)}. \quad (4.38)$$

Les solutions de l'équation (4.37) sont évidemment :

$$K_1 = i_o \quad \text{et} \quad K_2 = i_o + \pi. \quad (4.39)$$

Pour l'équation (4.38), avec les valeurs traditionnelles (Anderson et al, 1987) $C_0^2 = -0.6 \cdot 10^{-4}$ et $C_2^2 = 0.1 \cdot 10^{-4}$, elles valent

$$K_3 = 102.3319^\circ \quad \text{et} \quad K_4 = -88.3319^\circ. \quad (4.40)$$

Ces solutions correspondent aux quatre états mentionnés dans Peale (1974). Pour les deux premières valeurs de K , l'axe du moment angulaire est respectivement parallèle ou antiparallèle à la normale au plan orbital. Les deux autres valeurs de l'obliquité écliptique dépendent des coefficients C_0^2 et C_2^2 ; elles existent pour une très large gamme de ces deux coefficients couvrant largement les estimations actuelles (Margot, 2007) de ces coefficients (voir Figure 5.1, p.58).

Le cas $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$ fournit comme équations :

$$\sin(i_o - K) = 0 \quad \text{et} \quad (4.41)$$

$$\sin(i_o - K) = \frac{-C_2^2 \left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16} \right)}{C_2^0 \left(1 + \frac{3e^2}{2} \right) - C_2^2 \left(\frac{7e}{2} + \frac{123e^3}{16} \right)} \quad (4.42)$$

qui nous permettent à nouveau de trouver quatre valeurs de l'obliquité écliptique : les deux premières sont les mêmes que précédemment ($K_1 = i_o$ et $K_2 = i_o + \pi$) et les deux dernières valent

$$K_5 = 90.4461^\circ \quad \text{et} \quad K_6 = -76.4461^\circ. \quad (4.43)$$

Ces deux configurations $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$ sont bien différentes puisque, par exemple, en $K = i_o$, pour $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$, lorsque la planète est au péricentre, l'axe de plus petit moment d'inertie l'est aussi tandis que pour $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$, lorsque Mercure se trouve au péricentre, l'axe de plus petit moment d'inertie est perpendiculaire à la direction du péricentre (et aucune autre valeur d'équilibre de K ne peut le ramener dans la première configuration). Par contre, les deux dernières configurations géométriques de (4.32)

(à savoir $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, \pi)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, \pi)$) sont les mêmes que les deux premières. En effet, pour $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, \pi)$, en $K = i_o$, lorsque la planète est au péricentre, l'axe de plus petit moment d'inertie est à l'apocentre, l'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3, K) = (0, 0, i_o)$ correspond donc à l'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3, K) = (0, \pi, i_o + \pi)$ et inversement, l'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3, K) = (0, 0, i_o + \pi)$ correspond à l'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3, K) = (0, \pi, i_o)$. Le même raisonnement peut être appliqué aux équilibres $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, \pi)$.

Nous représentons à la Figure 4.1, la position des équilibres pour les deux configurations $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$.

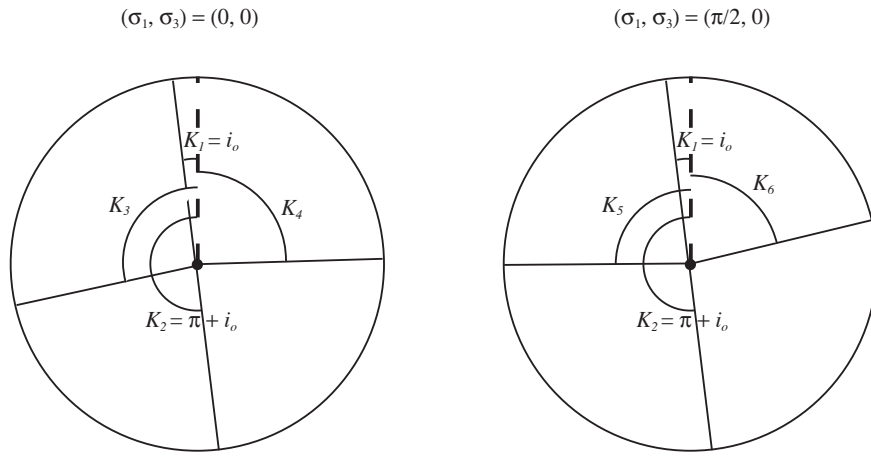


FIG. 4.1 – Valeurs angulaires de l'obliquité écliptique K pour les deux configurations physiquement différentes $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\pi/2, 0)$. La ligne en pointillés correspond à $K = 0$. Les valeurs numériques sont données dans le Tableau 4.1.

L'insertion des valeurs d'équilibre de σ_1 et σ_3 dans l'équation (4.36) nous permet de trouver numériquement les valeurs d'équilibre de Λ_1 pour chaque valeur d'équilibre de K et par conséquent celles de Λ_3 grâce à la relation (2.9) (voir Tableau 4.1).

Les valeurs numériques du Tableau 4.1 sont calculées avec R_e , le rayon équatorial de Mercure, m , la masse de Mercure et l'année pris respectivement comme unité de longueur, de masse et de temps. Il est à noter que les valeurs de Λ_1 sont égales pour K_3 et K_4 et pour K_5 et K_6 . Pour les autres valeurs de K , elles diffèrent les unes des autres à la douzième décimale.

La très faible obliquité de Mercure implique que son obliquité écliptique K est très proche

(σ_1, σ_3)	$(i_o - K)(^\circ)$	$(K)(^\circ)$	$\Lambda_1(\frac{m Re^2}{an})$	$\Lambda_3(\frac{m Re^2}{an})$
$(0, 0)$	0	$K_1 = 7$	13.303	0.099
	180	$K_2 = 7 + 180$	13.303	26.507
	-95.3319	$K_3 = 102.3319$	13.303	16.144
	95.3319	$K_4 = -88.3319$	13.303	12.9157
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	0	$K_1 = 7$	13.303	0.099
	180	$K_2 = 7 + 180$	13.303	26.507
	-83.4461	$K_5 = 90.4461$	13.303	13.407
	83.4461	$K_6 = -76.4461$	13.303	10.1853

TAB. 4.1 – Valeurs à l’équilibre de l’obliquité écliptique K pour $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et $(\sigma_1, \sigma_3) = (\frac{\pi}{2}, 0)$. Pour chaque valeur K_i , on obtient la valeur de Λ_1 et de Λ_3 à l’équilibre.

de son inclinaison i_o . Nous pouvons donc considérer que Mercure se trouve actuellement en libration autour du premier équilibre du Tableau 4.1.

4.6.1 Parenthèse sur les lois de Cassini Généralisées

Montrons ici que cet équilibre $(\sigma_1, \sigma_3, K) = (0, 0, 7^\circ)$ vérifie les lois de Cassini généralisées (Lemaître et al., 2006). Comme expliqué dans Beletsky (2000), ces lois sont valables pour une orbite képlérienne et pour une précession du nœud et du péricentre constante. Elles s’expriment de la façon suivante :

1. *Le corps tourne autour d’un axe principal d’inertie avec une vitesse angulaire égale (ou proche) à $\frac{3}{2}n$.*

En effet, à l’équilibre, $\vec{Z}_2 = \vec{Z}_3$ car $J = 0$, Mercure tourne donc bien autour du troisième axe principal d’inertie. De plus, $\sigma_3 = 0$ implique que $h = h_o$ et $\sigma_1 = 0$ implique que $l + g = -h + \frac{3}{2}l_o + g_o + h_o = \frac{3}{2}l_o + g_o$, on obtient dès lors que

$$\frac{d(l + g)}{dt} = \frac{3}{2}\dot{l}_o + \dot{g}_o \quad (4.44)$$

où g_o est un angle lent, sa dérivée est donc négligeable et vaut 0 dans le cas d’un mouvement képlérien pur.

2. *L’axe du moment angulaire du corps et la normale au plan orbital forment un angle constant.*

Comme, à l'équilibre, l'obliquité écliptique K est constante, l'obliquité θ (dont l'expression en fonction de K est donnée ci-dessous (éq. 4.45)) l'est aussi :

$$\cos \theta = \cos i_o \cos K + \sin i_o \sin K \cos (h_o - h) \quad (4.45)$$

3. *L'axe du moment angulaire du corps (\vec{Z}_2), la normale au plan orbital (\vec{Z}_1) et l'axe de précession de l'orbite (\vec{Z}_0) sont coplanaires.*

Cette assertion est triviale pour un problème képlérien pur car, dans ce cas, à l'équilibre, $K = i_o$ et donc $\vec{Z}_1 = \vec{Z}_2$. On peut montrer que cette proposition reste vraie si l'on introduit dans le modèle des précessions constantes.

4. *Chaque fois que le corps passe au péricentre de son orbite, un des axes principaux d'inertie orthogonaux et le rayon vecteur du péricentre se trouvent à égale distance de la ligne des nœuds.*

Le passage au péricentre implique que $l_o = 0$. De plus, à l'équilibre, $\sigma_1 = 0 = \sigma_3$. En rassemblant ces deux conditions, nous pouvons déduire qu'au péricentre, $l + g = g_o$, où $l + g$ est la distance angulaire entre la ligne des nœuds et l'axe \vec{X}_3 quand $J = 0$, et g_o est la distance angulaire entre la ligne des nœuds et le péricentre.

Comme montré par Colombo (1966), les états de Cassini peuvent être au nombre de deux ou quatre pour des corps présentant une symétrie axiale. Peale (1969) a complété cette théorie en ajoutant les effets dus à la triaxialité et à la résonance spin-orbite et est arrivé à la conclusion que si la différence du plus petit et du plus grand moment d'inertie est suffisamment importante ($\frac{I_3 - I_1}{I_3} > 10^{-6}$), il y aura 4 états de Cassini. Plus cette différence sera petite plus l'état de Cassini n°1 s'écartera de la normale au plan inertiel (\vec{Z}_0) tandis que la position 4 (correspondant à notre équilibre instable K_3 (voir section 4.7)) s'en rapprochera ; ces deux états finissant par coïncider (la position 1 devenant instable par la même occasion) pour des valeurs de $\frac{I_3 - I_1}{I_3} < 10^{-6}$. Dès lors, pour Mercure, pour un large intervalle de valeurs probables de $\frac{I_3 - I_1}{I_3}$, il y aura quatre états où l'axe du moment angulaire sera fixé.

Mercure se trouvant actuellement à l'état de Cassini n°1 (Peale, 1974), notre équilibre principal correspond, dans le cas képlérien, à cet état de Cassini.

4.6.2 Commensurabilité des nœuds

Comme nous l'avons déjà dit, le fait que σ_3 soit nul à l'équilibre implique que $h = h_o$, ce qui signifie que le nœud ascendant du plan normal à l'axe du moment angulaire sur le plan de l'écliptique et le nœud ascendant du plan orbital sur le plan de l'écliptique coïncident. On peut donc considérer σ_3 comme un deuxième "angle résonant" de type 1 : 1. Les deux plans (plan normal à l'axe du moment angulaire et plan orbital) précessant à la même vitesse, l'axe

du moment angulaire garde toujours la même orientation par rapport au plan orbital. Notons que parler résonance des nœuds, bien que abusivement admis dans la littérature, n'est pas tout à fait correct, il s'agit plutôt ici d'une commensurabilité des nœuds aussi appelée, dans un autre contexte, par (Ferraz-Mello et al., 1993) corotation des nœuds.

4.7 Stabilité des équilibres

Limitons-nous à présent à la configuration d'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et substituons toutes les valeurs d'équilibre de Λ_1 et Λ_3 dans les quatre équations aux variations

$$\begin{aligned} d\dot{\sigma}_1 &= \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_1 \partial \Lambda_1} d\sigma_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_1^2} d\Lambda_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_3 \partial \Lambda_1} d\sigma_3 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_3 \partial \Lambda_1} d\Lambda_3 \\ d\dot{\sigma}_3 &= \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_1 \partial \Lambda_3} d\sigma_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_1 \partial \Lambda_3} d\Lambda_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_3 \partial \Lambda_3} d\sigma_3 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_3^2} d\Lambda_3 \\ d\dot{\Lambda}_1 &= -\left(\frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_1^2} d\sigma_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_1 \partial \sigma_1} d\Lambda_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_3 \partial \sigma_1} d\sigma_3 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_3 \partial \sigma_1} d\Lambda_3 \right) \\ d\dot{\Lambda}_3 &= -\left(\frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_1 \partial \sigma_3} d\sigma_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_1 \partial \sigma_3} d\Lambda_1 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \sigma_3^2} d\sigma_3 + \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial \Lambda_3 \partial \sigma_3} d\Lambda_3 \right). \end{aligned}$$

Pour étudier la stabilité des quatre équilibres obtenus dans la section précédente pour $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$, nous devons calculer les valeurs propres de ce système. Nous trouvons ainsi que deux d'entre eux sont stables (leurs valeurs propres sont imaginaires pures et conjuguées 2 à 2) et que les deux autres, correspondant à $K = K_3$ et $K = K_4$, sont dégénérés car deux de leurs valeurs propres sont nulles (voir Tableau 4.2).

	Valeurs propres	Stabilité
$K_1 = i_o$	$(0.396 i, -0.396 i, 0.006 i, -0.006 i)$	Stable
$K_2 = 180 + i_o$	$(0.005 i, -0.005 i, 2 \cdot 10^{-9} i, -2 \cdot 10^{-9} i)$	Stable
$K_3 = 102.3319$	$(0.18 i, -0.18 i, 0, 0)$?
$K_4 = -88.3319$	$(0.18 i, -0.18 i, 0, 0)$?

TAB. 4.2 – Stabilité des équilibres dans le cas $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$ et $J = 0$.

L'équilibre K_1 , correspondant à l'état actuel de Mercure, étant effectivement stable, nous ne considérerons plus que cet équilibre pour le modèle à 2 degrés de liberté.

4.8 Fréquence des deux variables angulaires

Nous allons, dans cette section, effectuer une série de transformations afin d'extraire un Hamiltonien simplifié, exprimé en variables angle-action, du type

$$H = \nu_1 J_1 + \nu_3 J_3 \quad (4.46)$$

où les J_i sont les variables d'action et les ν_i sont les fréquences des variables angulaires ψ_i . Cette formulation présente de nombreux avantages : elle permet, entre autres, d'obtenir facilement les fréquences. De plus, lorsque des perturbations seront greffées sur ce modèle et qu'une moyennisation s'imposera, l'expression (4.46), indépendante des variables angulaires, constituera l'élément H_0^0 du Triangle de Lie (3.10), la perturbation occupant les autres cases de la première colonne du triangle.

Les différentes transformations canoniques successives que nous allons opérer afin d'aboutir à l'expression (4.46) sont au nombre de cinq :

1. Passage en coordonnées cartésiennes permettant d'éviter les singularités,
2. Translation à l'équilibre. Cette transformation sera suivie d'un développement de l'Hamiltonien en série de Mac Laurin jusqu'à l'ordre 2. L'Hamiltonien sera alors du type

$$H = a x_1^2 + b x_1 x_3 + c x_3^2 + d \eta_1^2 + e \eta_1 \eta_3 + f \eta_3^2. \quad (4.47)$$

3. Elimination des termes croisés (c'est-à-dire $x_1 x_3$ et $\eta_1 \eta_3$) dans l'Hamiltonien (4.47),
4. Changement d'échelle afin d'attribuer à chaque couple "variable-moment" le même coefficient ; ce qui nous donnera l'Hamiltonien suivant :

$$H = \gamma_u(u^2 + U^2) + \gamma_v(v^2 + V^2). \quad (4.48)$$

5. Passage en coordonnées angle-action afin d'obtenir la forme voulue (4.46) de notre Hamiltonien.

4.8.1 Passage aux coordonnées cartésiennes

Mercure n'étant évidemment pas bloqué exactement à la résonance 3 : 2, il effectue une petite libration autour de sa position d'équilibre. Afin de reproduire cette oscillation, introduisons de nouvelles variables, cartésiennes cette fois, ξ_i et η_i . En coordonnées polaires, les angles correspondants varient de 0 à 2π .

$$\eta_1 = \sqrt{2 \Lambda_1} \sin \sigma_1 \quad (4.49)$$

$$\eta_3 = \sqrt{2 \Lambda_3} \sin \sigma_3 \quad (4.50)$$

$$\xi_1 = \sqrt{2 \Lambda_1} \cos \sigma_1 \quad (4.51)$$

$$\xi_3 = \sqrt{2 \Lambda_3} \cos \sigma_3 \quad (4.52)$$

où les η_i sont les variables et les ξ_i les moments conjugués associés³.

4.8.2 Translation à l'équilibre

Pour mesurer l'amplitude et la période de cette libration, nous nous plaçons à l'équilibre à l'aide d'un changement de variables :

$$x_1 = \xi_1 - \xi_1^* \quad (4.53)$$

$$x_3 = \xi_3 - \xi_3^* \quad (4.54)$$

où ξ_1^* et ξ_3^* sont les valeurs à l'équilibre de ξ_1 et ξ_3 . Dans notre cas, $\xi_1^* = 5.1581$ et $\xi_3^* = 0.4453$. Aucun changement de variables n'est nécessaire pour les η_i vu qu'à l'équilibre $(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0)$, on obtient $(\eta_1, \eta_3) = (0, 0)$.

Développons ensuite l'Hamiltonien en séries de η_1, η_3, x_1 et x_3 à l'ordre 2. On obtient une expression de la forme (D'Hoedt & Lemaître, 2005) :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = a x_1^2 + b x_1 x_3 + c x_3^2 + d \eta_1^2 + e \eta_1 \eta_3 + f \eta_3^2 \quad (4.55)$$

où les termes d'ordre 1 ont disparu étant donné que l'on se trouve à l'équilibre.

Et numériquement :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle = & 39.12645 x_1^2 + 0.00051 x_1 x_3 + 0.00296 x_3^2 \\ & + 0.001 \eta_1^2 + 0.00017 \eta_1 \eta_3 + 0.00295 \eta_3^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.8.3 Elimination des termes croisés : "Untangling Transformation"

Afin d'éliminer les termes croisés, nous effectuons une transformation canonique appelée "untangling transformation" (Henrard & Schwanen, 2004, Henrard & Lemaître, 2005) :

$$\eta_1 = r - \beta s \quad (4.57)$$

$$\eta_3 = (1 - \alpha \beta) s + \alpha r \quad (4.58)$$

$$x_1 = R(1 - \alpha \beta) - \alpha S \quad (4.59)$$

$$x_3 = S + \beta R. \quad (4.60)$$

Les coefficients α et β sont obtenus comme suit. Soit l'Hamiltonien (4.55) réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle = & \left(\frac{d_{rr}}{2} \eta_1^2 + d_{sr} \eta_1 \eta_3 + \frac{d_{ss}}{2} \eta_3^2 \right) + \\ & \left(\frac{d_{RR}}{2} x_1^2 + d_{SR} x_1 x_3 + \frac{d_{SS}}{2} x_3^2 \right), \end{aligned} \quad (4.61)$$

³Les expressions analytiques complètes des Hamiltoniens obtenus dans cette section et les suivantes étant excessivement longues, nous n'avons pas pu les joindre à ce manuscrit.

après transformation, cet Hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle = & \left(\frac{d_{r'r'}}{2} r^2 + d_{s'r'} r s + \frac{d_{s's'}}{2} s^2 \right) + \\ & \left(\frac{d_{R'R'}}{2} R^2 + d_{S'R'} R S + \frac{d_{S'S'}}{2} S^2 \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

où les coefficients sont donnés par les relations suivantes

$$d_{r'r'} = d_{rr} + 2 d_{sr} \alpha + d_{ss} \alpha^2 \quad (4.63)$$

$$d_{s'r'} = -2 d_{rr} \beta + 2 d_{sr} (1 - 2 \alpha \beta) + 2 d_{ss} \alpha (1 - \alpha \beta) \quad (4.64)$$

$$d_{s's'} = d_{rr} \beta^2 - 2 d_{sr} \beta (1 - \alpha \beta) + d_{ss} (1 - \alpha \beta)^2 \quad (4.65)$$

$$d_{R'R'} = d_{RR} (1 - \alpha \beta)^2 + 2 d_{SR} \beta (1 - \alpha \beta) + d_{SS} \beta^2 \quad (4.66)$$

$$d_{S'R'} = -2 d_{RR} \alpha (1 - \alpha \beta) + 2 d_{SR} (1 - 2 \alpha \beta) + 2 d_{SS} \beta \quad (4.67)$$

$$d_{S'S'} = d_{RR} \alpha^2 - 2 d_{SR} \alpha + d_{SS}. \quad (4.68)$$

Le but étant de supprimer les termes croisés, nous annulons les équations (4.64) et (4.67). Le système ainsi obtenu permet de déterminer les valeurs de α et β . Pour notre modèle, nous trouvons

$$\alpha = 0 \quad (4.69)$$

$$\beta = 0.086336 \quad (4.70)$$

et l'Hamiltonien sans termes croisés s'écrit :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{d_{r'r'}}{2} r^2 + \frac{d_{s's'}}{2} s^2 + \frac{d_{R'R'}}{2} R^2 + \frac{d_{S'S'}}{2} S^2 \quad (4.71)$$

$$= 0.001 r^2 + 39.12643 R^2 + 0.00294 s^2 + 0.00296 S^2. \quad (4.72)$$

4.8.4 Changement d'échelle

Un changement de variables supplémentaire va nous permettre d'avoir, dans l'expression de l'Hamiltonien, le même coefficient pour chaque variable et son moment associé. Cette transformation s'écrit :

$$r = \alpha' u, \quad R = \frac{U}{\alpha'} \quad (4.73)$$

$$s = \beta' v, \quad S = \frac{V}{\beta'}, \quad (4.74)$$

Dans ces variables, l'Hamiltonien prend cette forme :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \frac{d_{r'r'}}{2} \alpha'^2 u^2 + \frac{d_{s's'}}{2} \beta'^2 v^2 + \frac{d_{R'R'}}{2} \frac{U^2}{\alpha'^2} + \frac{d_{S'S'}}{2} \frac{V^2}{\beta'^2}. \quad (4.75)$$

α' et β' sont obtenus en identifiant respectivement les coefficients de u^2 et de U^2 et ceux de v^2 et de V^2 :

$$d_{r'r'} \alpha'^2 = \frac{d_{R'R'}}{\alpha'^2} \text{ et } d_{s's'} \beta'^2 = \frac{d_{S'S'}}{\beta'^2}. \quad (4.76)$$

L'Hamiltonien s'écrit alors

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \gamma_u (u^2 + U^2) + \gamma_v (v^2 + V^2). \quad (4.77)$$

Dans notre modèle,

$$\alpha' = 14.0532 \quad (4.78)$$

$$\beta' = 1.00187 \quad (4.79)$$

et donc

$$\langle \mathcal{H} \rangle = 0.19812 (u^2 + U^2) + 0.00295 (v^2 + V^2). \quad (4.80)$$

4.8.5 Passage aux coordonnées angle-action

Passons finalement en coordonnées “angle-action” :

$$u = \sqrt{2J_1} \sin \psi_1 \quad (4.81)$$

$$U = \sqrt{2J_1} \cos \psi_1 \quad (4.82)$$

$$v = \sqrt{2J_3} \sin \psi_3 \quad (4.83)$$

$$V = \sqrt{2J_3} \cos \psi_3. \quad (4.84)$$

Dans ces variables, nous obtenons un Hamiltonien dépendant seulement des moments :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \nu_1 J_1 + \nu_3 J_3 \quad (4.85)$$

où ν_1 et ν_3 sont les fréquences des angles ψ_1 et ψ_3 . Dans notre simulation,

$$\nu_1 = 0.396234 \frac{1}{\text{an}}, \quad (4.86)$$

$$\nu_3 = 0.005899 \frac{1}{\text{an}}. \quad (4.87)$$

La période de ψ_1 est donc de 15.8573 ans et celle de ψ_3 de 1065.08 ans⁴. En outre ces périodes sont également celles du mouvement de σ_1 et de σ_3 . En effet, pendant la durée d'un tour complet de ψ_i autour de son équilibre, σ_i effectue un aller-retour entre ses valeurs de libration minimum et maximum (voir Figure 4.2). Ces résultats coïncident avec ceux de Rambaux & Bois (communication privée) obtenus par le modèle numérique SONYR (mais pour une excentricité et une inclinaison légèrement différentes), qui trouvent 15.84 ans pour ψ_1 et 1062 ans pour ψ_3 .

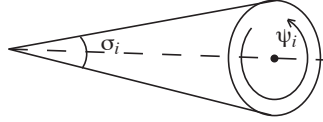


FIG. 4.2 – Pendant que ψ_i effectue un tour complet, σ_i oscille entre ses valeurs minimale et maximale.

⁴Il est à noter que ces périodes auraient, bien entendu, pu être obtenues dès l'équation (4.72) où notre Hamiltonien est écrit sous la forme d'un oscillateur harmonique duquel on peut tirer les deux fréquences en prenant la racine carrée du produit des coefficients associés à chaque paire "variable-moment". Toutefois, comme nous voulions également l'expression de notre Hamiltonien en angle-action pour nos développements futurs, nous avons tenu à effectuer la succession complète des transformations.

MODÈLE À 3 DEGRÉS DE LIBERTÉ

Dans ce chapitre, nous généraliserons notre modèle de base à deux dimensions à un modèle à trois dimensions afin de prendre en compte le fait qu'en réalité, l'axe du moment angulaire et le plus petit axe d'inertie sont dissociés. Nous calculerons ensuite les équilibres de l'Hamiltonien ainsi obtenu et leur stabilité. Enfin, nous donnerons les valeurs des périodes propres de chacun des 3 degrés de liberté.

5.1 Hamiltonien simplifié à 3 degrés de liberté

Revenons donc, à présent, au cas à 3 degrés de liberté. Dans ce modèle, $J \neq 0$ ce qui signifie physiquement que l'on considère que l'axe normal au plan de l'orbite, l'axe du moment angulaire et l'axe de plus grande inertie sont tous distincts. Grâce à cette hypothèse, λ_2 est maintenant bien défini.

Le potentiel s'écrit dès lors (D'Hoedt & Lemaître, 2006) :

$$\begin{aligned} \langle V_G \rangle &= -\frac{\mathcal{G}Mm^7}{(\Lambda_0 - \frac{3}{2}\Lambda_1)^6} \mu^3 (R_e)^2 \\ &\times \left[\frac{1}{2} C_2^0 \left(d_{000} + \sum_{k=1}^2 d_{00k} \cos(k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 d_{22k} \cos(2\sigma_1 + 2\lambda_2 + k\sigma_3) \right) \right. \\ &\quad + 3 C_2^2 \left(\sum_{k=-2}^2 d_{02k} \cos(2\lambda_2 + k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 d_{20k} \cos(2\sigma_1 + k\sigma_3) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^4 d_{24k} \cos(2\sigma_1 + 4\lambda_2 + k\sigma_3) \right) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec d_{lmn} dépendant de i_o , J , K et e et où l est le coefficient de σ_1 , m celui de λ_2 et n celui de σ_3 . L'expression complète de $\langle V_G \rangle$ est donné dans l'Annexe D.

5.2 Equilibres du modèle à 3 degrés de liberté

A nouveau, les équilibres peuvent être calculés en annulant les équations du mouvement

$$\dot{\sigma}_1 = \frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\Lambda_1} = \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial\Lambda_1} + \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos K)} \frac{\partial(\cos K)}{\partial\Lambda_1} \quad (5.2)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\Lambda_2} = \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos J)} \frac{\partial(\cos J)}{\partial\Lambda_2} \quad (5.3)$$

$$\dot{\sigma}_3 = \frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\Lambda_3} = \frac{\partial\langle\mathcal{H}\rangle}{\partial(\cos K)} \frac{\partial(\cos K)}{\partial\Lambda_3} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_1 &= -\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\sigma_1} \\ &= \sum_{k=0}^4 f_{22k} \sin(2\sigma_1 + 2\lambda_2 + k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 f_{20k} \sin(2\sigma_1 + k\sigma_3) \\ &\quad + \sum_{k=0}^4 f_{24k} \sin(2\sigma_1 + 4\lambda_2 + k\sigma_3) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_2 &= -\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\lambda_2} \\ &= f'_{020} \sin(2\lambda_2) + \sum_{k=0}^4 f'_{22k} \sin(2\sigma_1 + 2\lambda_2 + k\sigma_3) \\ &\quad + \sum_{k=-2}^2 f'_{02k} \sin(2\lambda_2 + k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 f'_{24k} \sin(2\sigma_1 + 4\lambda_2 + k\sigma_3) \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_3 &= -\frac{d\langle\mathcal{H}\rangle}{d\sigma_3} \\ &= \sum_{i=1}^2 f''_{00k} \sin(k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 f''_{22k} \sin(2\sigma_1 + 2\lambda_2 + k\sigma_3) \\ &\quad + \sum_{k=-2}^2 f''_{02k} \sin(2\lambda_2 + k\sigma_3) + \sum_{k=0}^4 f_{20k} \sin(2\sigma_1 + k\sigma_3) \\ &\quad + \sum_{k=0}^4 f''_{24k} \sin(2\sigma_1 + 4\lambda_2 + k\sigma_3) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où les coefficients f_{lmn} , f'_{lmn} et f''_{lmn} dépendent de i_o , K , J et e . Notons que le premier terme de l'équation (5.6) provient de l'énergie cinétique (4.2).

L'équation (5.6) fournit les valeurs d'équilibre pour λ_2 :

$$\lambda_2 \in \{0, \frac{\pi}{2}\}. \quad (5.8)$$

Pour chacune de ces valeurs de λ_2 , les équations (5.5) et (5.7) fournissent les mêmes équilibres que dans notre modèle à deux dimensions (4.32) :

$$(\sigma_1, \sigma_3) = (0, 0), (\pi/2, 0), (0, \pi), (\pi/2, \pi). \quad (5.9)$$

Pour J , dans notre modèle, la valeur d'équilibre attendue (car correspondant à la situation actuelle de Mercure) est 0. Or si J est nul, notre jeu de variables devient partiellement singulier. C'est pourquoi nous allons effectuer le changement de variables suivant afin de travailler en variables cartésiennes :

$$\eta_1 = \sqrt{2\Lambda_1} \sin \sigma_1 \quad (5.10)$$

$$\eta_2 = \sqrt{2\Lambda_2} \sin \lambda_2 \quad (5.11)$$

$$\eta_3 = \sqrt{2\Lambda_3} \sin \sigma_3 \quad (5.12)$$

$$\xi_1 = \sqrt{2\Lambda_1} \cos \sigma_1 \quad (5.13)$$

$$\xi_2 = \sqrt{2\Lambda_2} \cos \lambda_2 \quad (5.14)$$

$$\xi_3 = \sqrt{2\Lambda_3} \cos \sigma_3. \quad (5.15)$$

A l'équilibre, pour $(\sigma_1, \lambda_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$, on trouve :

$$\xi_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi_2 = \xi_1 \quad (5.16)$$

or par (5.14) et (2.8) en $\lambda_2 = 0$,

$$\xi_2 = \xi_1 \sqrt{1 - \cos J} \quad (5.17)$$

ce qui revient donc à dire qu'à l'équilibre,

$$J = 0 \quad \text{ou} \quad J = \frac{\pi}{2}. \quad (5.18)$$

Il est à remarquer que $J = \frac{\pi}{2}$ est la valeur obtenue par Deprit (1967) dans son modèle de pure rotation libre, c'est-à-dire en absence de champ de gravité (voir Annexe E).

Pour $J = 0$, on retrouve les quatre mêmes valeurs d'équilibre pour l'obliquité écliptique K

et pour ξ_1 que dans le modèle à deux dimensions. L'expression des deux valeurs de l'obliquité écliptique dépendant de C_0^2 et C_2^2 étant à présent donnée par :

$$i_o - K = \pm \arccos \left(\frac{\left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16}\right) (C_0^2 - 2C_2^2 - (C_0^2 + 2C_2^2) \cos^2 J)}{2 \left(1 + \frac{3e^2}{2}\right) (C_0^2 + 6C_2^2 - 3(C_0^2 + 2C_2^2) \cos^2 J)} \right) + \frac{\left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16}\right) (C_0^2 - 2C_2^2 - (C_0^2 + 2C_2^2) \cos^2 J)}{\left(\frac{7e}{2} - \frac{123e^3}{16}\right) (-C_0^2 + 2C_2^2 + (C_0^2 + 2C_2^2) \cos^2 J)} \right). \quad (5.19)$$

Notons que ces deux valeurs sont bien définies en $J = 0$ pour toutes les valeurs possibles de C_0^2 et C_2^2 (voir Figure 5.1). En effet, en remplaçant J par 0 et e par 0.206 dans (5.19), on trouve que les seules valeurs qui annulent le dénominateur sont données par

$$C_0^2 = 0.614671 C_2^2 \quad (5.20)$$

ce qui est impossible vu que, par définition (voir éqs. B.13 et B.12), C_0^2 et C_2^2 sont de signes différents et que Mercure n'est pas une sphère parfaite.

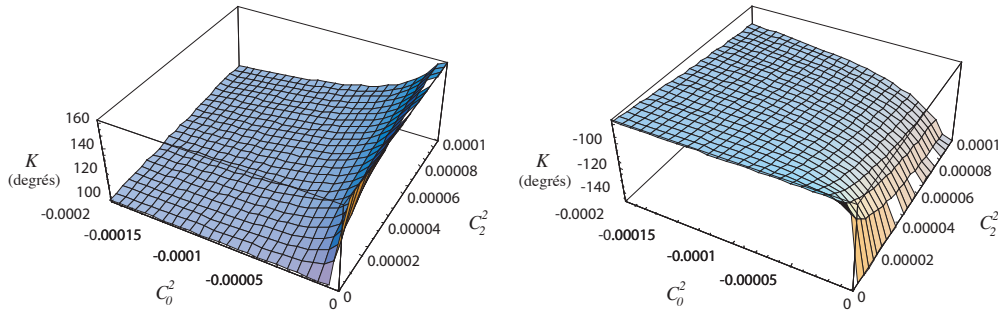


FIG. 5.1 – Le graphique de gauche montre l'évolution de l'obliquité écliptique K_3 (en degrés) en fonction de C_0^2 et C_2^2 pour $J = 0$. Le graphique de droite donne les valeurs possibles de K_4 .

Par contre, pour $J = \frac{\pi}{2}$, on ne retrouve que deux valeurs d'équilibre au lieu de quatre, soient

$$K = 7^\circ \quad \text{et} \quad K = 187^\circ \quad (5.21)$$

à cause d'un malencontreux choix numérique pour C_0^2 et C_2^2 . En effet, l'expression permettant d'obtenir les deux autres valeurs de K est donnée par

$$i_o - K = \pm \arccos \frac{(C_0^2 - 2C_2^2) \left(\frac{7}{2}e + \frac{123}{16}e^3\right)}{2(C_0^2 + 6C_2^2) \left(1 + \frac{3e^2}{2}\right) - (C_0^2 - 2C_2^2) \left(\frac{7}{2}e + \frac{123}{16}e^3\right)} \quad (5.22)$$

dont le membre de droite vaut $\pm \pi$ quand $C_0^2 = -6 C_2^2$ ce qui est justement notre cas puisque nous avons choisi :

$$C_0^2 = -0.6 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad C_2^2 = 0.1 \cdot 10^{-4}. \quad (5.23)$$

De plus, les deux valeurs K_3 et K_4 de l'obliquité éclipse ne sont bien pas définies en $J = \frac{\pi}{2}$ pour

$$C_0^2 = -9.5496 C_2^2 \quad (5.24)$$

ce qui pourrait être possible dans le cas de Mercure (voir Figure 5.2).

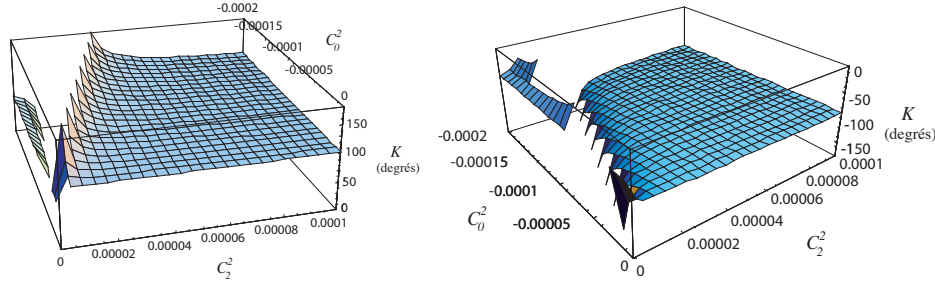


FIG. 5.2 – Le graphique de gauche montre l'évolution de l'obliquité éclipse K_3 (en degrés) en fonction de C_0^2 et C_2^2 pour $J = \frac{\pi}{2}$. Le graphique de droite donne les valeurs possibles de K_4 .

Notons également que pour $K = 7^\circ$, $\xi_1 = 5.15779$, ce qui correspond à la valeur de d'équilibre de Λ_1 suivante :

$$\Lambda_1 = 13.3014, \quad (5.25)$$

soit une valeur légèrement différente de celle obtenue pour $J = 0$ (voir tableau Tab 4.1).

5.3 Stabilité des équilibres

A nouveau, si nous limitons notre étude de stabilité au cas $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \xi_2) = (0, 0, 0, 0)$, i.e. $J = 0$, nous retrouvons évidemment, pour chaque valeur de l'obliquité éclipse, le même de type de stabilité que pour le modèle à deux dimensions (voir Tableau 4.2).

5.4 Périodes du modèle à 3 degrés de liberté

Si nous appliquons la même méthode que précédemment (i.e. translation à l'équilibre, transformation de type "untangling", changement d'échelle puis passage aux variables angle-action) au modèle à trois dimensions, nous obtenons l'expression suivante de l'Hamiltonien :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = 0.396234 J_1 + 0.0107591 J_2 + 0.00589928 J_3 \quad (5.26)$$

dont nous pouvons tirer la valeur des trois périodes propres :

$$T_1 = \text{période de } \sigma_1 = 15.8573 \text{ ans} \quad (5.27)$$

$$T_2 = \text{période de } \lambda_2 = 583.989 \text{ ans} \quad (5.28)$$

$$T_3 = \text{période de } \sigma_3 = 1065.08 \text{ ans.} \quad (5.29)$$

Ces trois valeurs sont une très bonne approximation de celles obtenues par Rambaux & Bois (2004) qui intègrent numériquement un modèle complet de la rotation de Mercure à l'aide de leur modèle numérique SONYR.

INFLUENCE DES AUTRES PLANÈTES DU SYSTÈME SOLAIRE

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que des modèles purement képlériens. Toutefois, Mercure étant relativement semblable à la Lune de par sa taille, sa surface cratérisée et par le fait qu'elles sont toutes deux en résonance spin-orbite (on trouve d'ailleurs dans la littérature de nombreux exemples où l'étude de Mercure s'est basée sur des théories existant pour la Lune), l'étude de la précession du nœud ascendant dû à l'influence des autres planètes s'impose. En effet, dans le cas de la Lune, ce terme de précession est crucial. Nous introduirons ensuite un deuxième effet indirect dû à ces mêmes planètes : la précession du péricentre (D'Hoedt et al., 2007).

6.1 Introduction de la précession du nœud ascendant

Introduisons, dans cette section, une précession constante μ_1 du nœud ascendant. Nous avons ainsi la relation :

$$\dot{h}_o = \mu_1. \quad (6.1)$$

Dès lors, notre Hamiltonien devient :

$$\mathcal{K}_\mu = \langle \mathcal{H} \rangle + \mu_1 H_o \quad (6.2)$$

$$= \langle \mathcal{H} \rangle - \mu_1 (\Lambda_1 - \Lambda_3) \quad (6.3)$$

$$= \langle \mathcal{H} \rangle - \mu_1 \Lambda_1 \cos K \quad (6.4)$$

où $\langle \mathcal{H} \rangle$ représente l'Hamiltonien moyennisé sans précession que nous avons étudié dans la section précédente et où H_o est le moment associé à h_o et s'exprime en fonction de Λ_1 et Λ_3 grâce à la relation (4.26).

Dans ce modèle, on trouve toujours comme équilibre $(\sigma_1, \lambda_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$ et, moyennant à nouveau un changement de variables en coordonnées cartésiennes, $J = 0$. Par contre, les valeurs de l'obliquité éclipse K changent. Dans le Tableau 6.1, nous donnons les nouvelles valeurs de K pour $\mu_1 = -2.2247 \cdot 10^{-5}$ par an, valeur obtenue par SONYR (Rambaux & Bois, 2004) pour une précession due à toutes les planètes. Dans ce tableau, les petites corrections (en arcmin) représentent la variation de K_i due à la précession. Quant aux valeurs de Λ_1 , elles ne varient, par rapport aux valeurs sans précession, qu'à la sixième ou septième décimale.

J	K (deg)	$\Lambda_1(\frac{m Re^2}{an})$
0	$K_1 = i_o + 1.586 \text{ arcmin}$	13.303
	$K_2 = 180 + i_o - 1.895 \text{ arcmin}$	13.303
	$K_3 = 102.099 \rightarrow \Delta = -13.967 \text{ arcmin}$	13.303
	$K_4 = -88.094 \rightarrow \Delta = 14.276 \text{ arcmin}$	13.303

TAB. 6.1 – Valeurs de l'obliquité éclipse K à l'équilibre dans le cas $(\sigma_1, \lambda_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$ et $J = 0$ avec une précession constante μ_1 due à toutes les planètes.

Notons comme premier résultat que l'introduction de la précession du nœud permet de déterminer la stabilité des troisième et quatrième équilibres qui ne sont plus dégénérés et deviennent instable pour l'un et stable pour l'autre (voir Tableau 6.2).

J	K (deg)	Valeurs propres	Stabilité
0	K_1	$(0.396 i, -0.396 i, 0.006 i, -0.006 i)$	stable
	K_2	$(0.005 i, -0.005 i, 3 \cdot 10^{-8} i, -3 \cdot 10^{-8} i)$	stable
	K_3	$(0.18 i, -0.18 i, -0.0001, 0.0001)$	instable
	K_4	$(0.18 i, -0.18 i, 0.0001 i, -0.0001 i)$	stable

TAB. 6.2 – Stabilité des équilibres pour les différentes valeurs de K dans le cas $(\sigma_1, \lambda_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$ et $J = 0$ avec une précession constante μ_1 due à toutes les planètes.

La deuxième conséquence de l'introduction de cette précession est une légère modification des fréquences propres et donc des périodes du mouvement de rotation. L'influence sur les périodes de σ_1 et λ_2 est très petite (aux alentours de 28 secondes sur une période de 15.8573 ans pour T_1 et de 85 minutes sur une période de 583.989 ans pour T_2); par contre, la période de σ_3 devient 1069.08 ans (au lieu de 1065.08 ans), ce qui signifie un accroissement non négligeable de 4 ans. Ces résultats correspondent à nouveau en première approximation à ceux de Rambaux & Bois (2004) qui trouvent 15.82 ans pour T_1 et 1066.8 ans pour T_3 (soit également une aug-

mentation de 4 ans par rapport à leur valeur sans précession) pour un modèle de précession plus complet et non tronqué en excentricité.

6.1.1 Influence de Vénus et Jupiter

Si nous considérons l'effet d'une précession due seulement à Vénus (planète la plus proche de Mercure), μ_{1V} , ou seulement à Jupiter (la plus grosse planète du Système Solaire), μ_{1J} , nous n'obtenons qu'une assez mauvaise approximation de la variation de période de σ_3 .

Avec $\mu_{1V} = -0.9569 \cdot 10^{-5}$ par an,

$$T_3 = 1066.79 \text{ ans}, \quad (6.5)$$

avec $\mu_{1J} = -0.7229 \cdot 10^{-5}$ par an,

$$T_3 = 1066.37 \text{ ans}, \quad (6.6)$$

soit une variation de la période de seulement 1.71 an (respectivement 1.3 an) par rapport à la période obtenue dans le cadre du modèle purement képlérien. Quant à la variation de l'obliquité écliptique, elle est respectivement de 0.68 et 0.51 arcmin. Notons que l'influence de la précession sur T_3 et sur K est presque linéaire. En effet,

$$\frac{\mu_{1V}}{\mu_1} \simeq \frac{\delta T_{3\mu_{1V}}}{\delta T_{3\mu_1}} \simeq \frac{\delta K_{1\mu_{1V}}}{\delta K_{1\mu_1}} \simeq 0.43 \quad (6.7)$$

$$\frac{\mu_{1J}}{\mu_1} \simeq \frac{\delta T_{3\mu_{1J}}}{\delta T_{3\mu_1}} \simeq \frac{\delta K_{1\mu_{1J}}}{\delta K_{1\mu_1}} \simeq 0.32. \quad (6.8)$$

Par contre, si nous prenons la précession obtenue par SONYR en cumulant leurs deux effets ($\mu_{1V+J} = -1.68954 \cdot 10^{-5}$ par an), l'approximation de la période de σ_3 et de la variation de l'obliquité écliptique est nettement meilleure et même assez proche ($T_3 = 1068.11$ ans, $\delta K = 1.2$ arcmin) du résultat obtenu en considérant l'ensemble des planètes (voir Figure 6.1).

Les points de la Figure 6.1 étant quasiment alignés, nous avons effectué une régression linéaire du nuage de points. L'équation obtenue donne une bonne approximation de la variation de la période T_3 en fonction de la valeur de la précession du nœud

$$\delta T_3 = -1.79733 \cdot 10^5 \mu_1. \quad (6.9)$$

6.2 Introduction de la précession du péricentre

De la même façon que nous avons introduit la précession du nœud ascendant, introduisons à présent une précession constante du péricentre μ_2 . Grâce à la relation

$$\dot{g}_o = \mu_2, \quad (6.10)$$

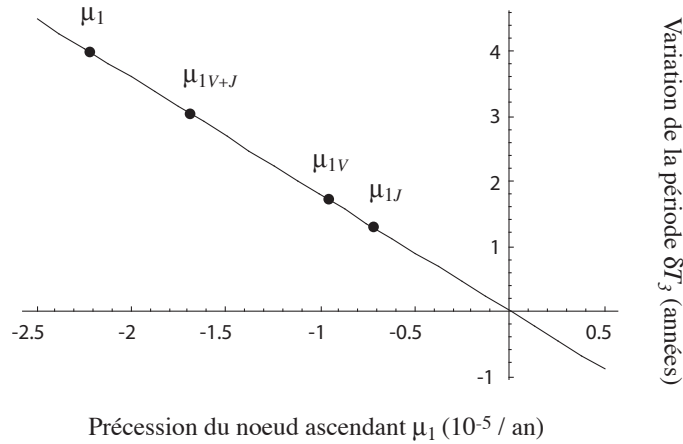


FIG. 6.1 – Les points ont pour abscisse (de gauche à droite et en 10^{-5} par an) la précession du nœud ascendant due à toutes les planètes, à Vénus + Jupiter, à Vénus seule et à Jupiter seul, et pour ordonnée la variation de la période T_3 (en années) correspondante. La droite a été obtenue par régression linéaire du nuage de points précité.

notre Hamiltonien prend à présent la forme :

$$\mathcal{K}_\mu = \langle \mathcal{H} \rangle + \mu_1 H_o + \mu_2 G_o \quad (6.11)$$

$$= \langle \mathcal{H} \rangle - \mu_1 (\Lambda_1 - \Lambda_3) - \mu_2 \Lambda_1 \quad (6.12)$$

$$= \langle \mathcal{H} \rangle - \mu_1 \Lambda_1 \cos K - \mu_2 \Lambda_1 \quad (6.13)$$

où G_o est le moment associé à g_o et peut s'exprimer en fonction de Λ_1 grâce à la relation (4.26).

A nouveau, les valeurs des variables angulaires ne changent pas à l'équilibre. De plus, l'influence additionnelle de μ_2 sur les valeurs de l'obliquité écliptique à l'équilibre n'est que d'environ 10^{-4} arcsec pour une précession du péricentre due à l'ensemble des planètes du Système Solaire (soit pour $\mu_2 = 4.77998 \cdot 10^{-5}$ par an). Par contre, elle modifie les valeurs d'équilibre de Λ_1 à la cinquième décimale, ce qui est un ou deux ordres de grandeur de plus que lorsque nous avons seulement ajouté la précession du nœud. Elle est de l'ordre de 10^{-1} seconde pour la période de σ_1 et d'environ 12h pour la période de σ_3 . Pour la période de λ_2 , l'effet de μ_2 vaut -94 minutes ce qui est presque exactement l'opposé de l'effet de μ_1 . L'effet combiné de μ_1 et μ_2 sur T_2 est donc de seulement 9.5 minutes (au lieu de quasiment une heure et demi avec μ_1 seule).

MOUVEMENT RÉSONANT COUPLÉ : ÉTUDE LOCALE

Nous allons analyser, dans ce chapitre, le couplage existant entre les 2 degrés de liberté principaux σ_1 et σ_3 lorsque notre Hamiltonien de base à deux dimensions est soumis à l'action d'une précession constante de la longitude du noeud ascendant. Les périodes de ces 2 degrés de liberté étant d'ordres assez différents, des méthodes différentes seront implémentées pour étudier leur influence mutuelle.

7.1 Espace de phase

Dans Rambaux et al. (2007b), nous nous sommes focalisés sur la dynamique au voisinage de l'équilibre $K = K_1$. Une intégration numérique de l'Hamiltonien \mathcal{K}_μ (éq. 6.4) exprimé en coordonnées cartésiennes (η_i, ξ_i) a été réalisée afin d'obtenir une description locale détaillée de l'espace de phase à 2 degrés de liberté.

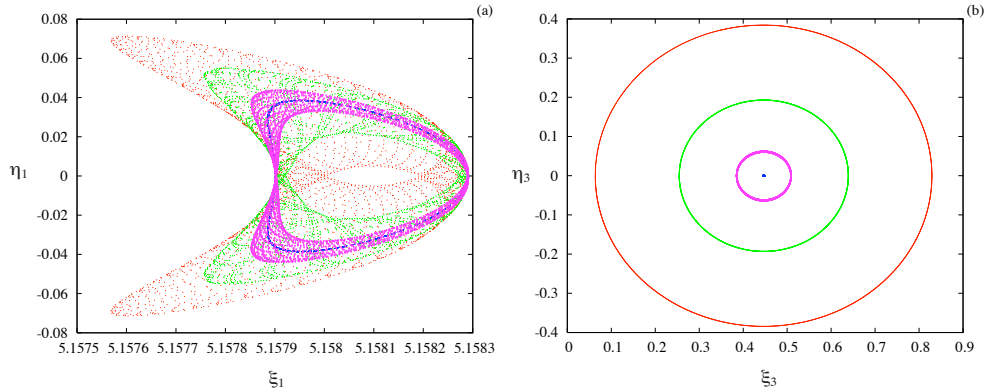


FIG. 7.1 – a : plan de phase (ξ_1, η_1) et b : plan de phase (ξ_3, η_3) . Les courbes de même couleur correspondent aux mêmes conditions initiales.

La Figure 7.1 montre la rotation couplée de Mercure dans les plans (ξ_1, η_1) et (ξ_3, η_3) pour des conditions initiales $\xi_{10} = 5.1581, \eta_{10} = 0.00, \eta_{30} = 0.00$ et pour ξ_{30} compris entre 0.0637 et 0.5079. Sur les Figures 7.1a et 7.1b, les courbes de même couleur correspondent aux mêmes conditions initiales. Les courbes dans le plan (ξ_1, η_1) présentent un comportement typique d'une résonance de premier ordre dans la zone de résonance (aussi appelée zone de libration). Le plan de phase (ξ_3, η_3) correspond à un comportement de type "oscillateur linéaire". Bien que le premier degré de liberté (ξ_1, η_1) soit associé à la période propre de 15 ans et le second (ξ_3, η_3) à la période propre de 1066 ans, (soit environ un rapport 70), leur influence mutuelle est très claire. Toutefois les périodes étant d'ordres assez différents, l'analyse de la perturbation qu'elles exercent l'une sur l'autre a demandé des outils spécifiques. Pour les sections 7.2 et 7.3, l'étude est réalisée pour les courbes rouges des Figures 7.1a et 7.1b correspondant à $\eta_{30} = 0.0637$, *i.e.* présentant une forte interaction entre les 2 degrés de liberté. Pour la section 7.4, la méthode des sections de Poincaré a été utilisée sur la courbe bleue, *i.e.* $\eta_{30} = 0.4453$.

7.2 Slice cutting

Pour illustrer le mouvement dans le plan (ξ_1, η_1) , la méthode de *slice cutting* développée par Froeschlé (1972) a été adoptée. L'espace des points $P = (\xi_1, \eta_1, t)$ est considéré pour $t \in [0, 1053]$ ans, soit approximativement au cours d'une période complète du deuxième degré de liberté. Une tranche de la famille de points (ξ_{1k}, η_{1k}) obtenue par projection de points P sur le plan (ξ, η) est telle que

$$\{(\xi, \eta, t) : t_{k-1} < t \leq t_k\} \quad (7.1)$$

où t_k est égal à $k h$ avec $h = 17$ ans et k variant de 0 à 62 (d'où l'intervalle de temps de 1053 ans). Un échantillon de ces tranches prises pour différentes valeurs de t_k est donné à la Figure 7.2 afin d'illustrer le comportement des interactions dynamiques. La séquence complète permet d'identifier les différentes phases dynamiques se produisant au cours du mouvement spin-orbite. En effet, ces tranches évoluent avec le temps à cause de l'interaction avec le second degré de liberté (ξ_3, η_3) . La projection a d'abord une forme de banane puis se déforme le long de sa branche supérieure avant de revenir à sa forme de banane. Le même phénomène se produit ensuite le long de la branche inférieure. La période de cette pulsation est celle du deuxième degré de liberté.

A partir de ces figures, nous pouvons déduire deux caractéristiques particulières du comportement : (i) l'aire comprise à l'intérieur des orbites semble constante et (ii) le centre de l'orbite effectue une oscillation régulière au cours de la période de pulsation.

La caractéristique (i) est typique d'un phénomène adiabatique. Nous allons vérifier cette assertion, numériquement et analytiquement, dans la section suivante.

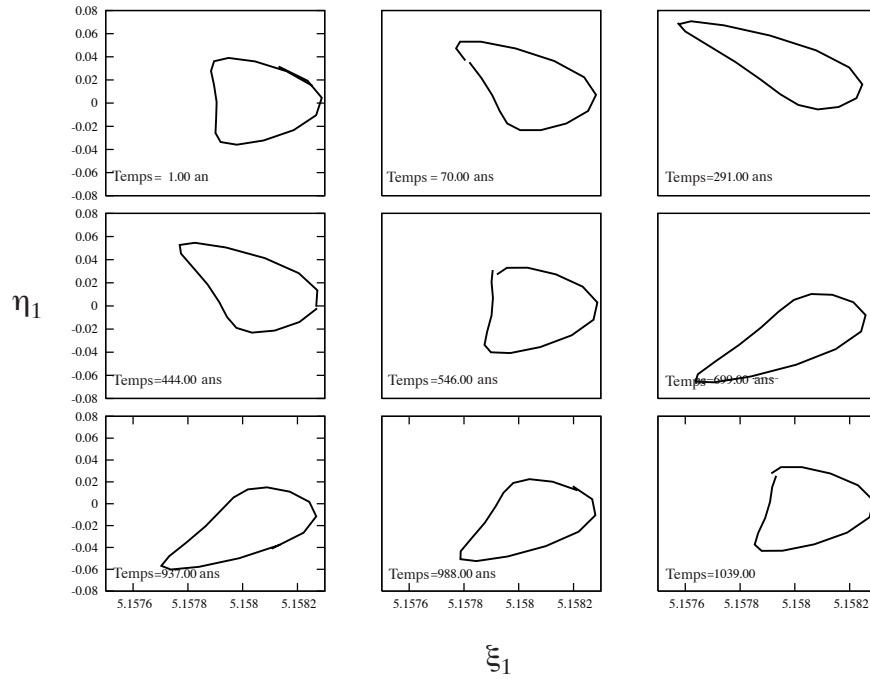


FIG. 7.2 – Comportement de l’orbite dans le plan (ξ_1, η_1) sur 1053 ans par tranches de 17 ans prises à différents instants.

7.3 Comportement adiabatique

Si nous transformons nos coordonnées (η_1, ξ_1) en coordonnées angle-action (J, ψ) à l’aide les relations :

$$\eta_1 = \sqrt{2J} \sin \psi \quad (7.2)$$

$$\xi_1 = \sqrt{2J} \cos \psi, \quad (7.3)$$

on peut montrer que l’aire comprise à l’intérieur d’une orbite vaut $2\pi J$, où J est la variable d’action définie par exemple par (Henrard, 2005) :

$$J = \frac{1}{4\pi} \oint \xi_1 d\eta_1 - \eta_1 d\xi_1. \quad (7.4)$$

Nous pouvons évaluer J à chaque pas de l’intégration numérique grâce à l’expression ci-dessus. La Figure 7.3 montre que l’action J est quasi constante sur 3000 ans, ceci démontre que le second degré de liberté agit comme un paramètre très lent sur le premier, de façon adiabatique (voir section 10).

Cette assertion est démontrée de manière analytique dans notre papier (Rambaux et al., 2007b). Les grandes étapes de cette preuve sont les suivantes :

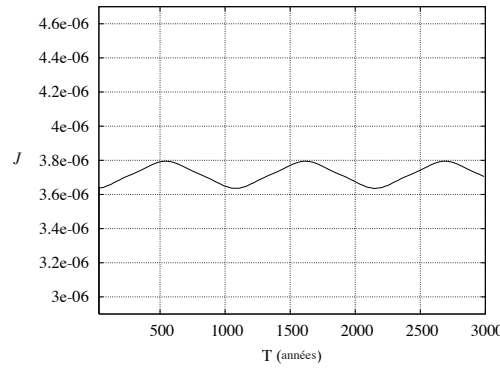


FIG. 7.3 – Evolution temporelle de l'action J sur 3000 ans.

1. Translation à l'équilibre $(\xi_i, \eta_i) \rightarrow (x_i, \eta_i)$ (voir section 4.8.2).
2. Définition du deuxième degré de liberté comme fonction lente du temps :

$$\begin{aligned} x_3 &= A_3 \cos \theta \\ \eta_3 &= B_3 \sin \theta \end{aligned} \tag{7.5}$$

où $\dot{\theta} = \omega_3$ est la fréquence propre (lente) du deuxième degré de liberté à l'équilibre et A_3 et B_3 sont de petites amplitudes fixées.

3. Translation pour éliminer les termes en θ de la partie quadratique de l'Hamiltonien (θ est toujours présent dans la fonction "reste" induite par le fait que nous désirons que cette translation soit une transformation canonique).
4. Passage aux coordonnées angle-action (J_1, ψ_1) .

En choisissant $A_3 = B_3 = 0.4$ correspondant à la simulation numérique (voir Figure 7.1b), on trouve que l'aire J_1 est presque constante : l'amplitude de l'oscillation $|\delta J_1|$ est de l'ordre de $1.2 \cdot 10^{-7}$ ce qui est en accord avec le calcul numérique représenté sur la Figure 7.3.

7.4 Mouvement du deuxième degré de liberté

Comme le premier degré de liberté (η_1, ξ_1) varie périodiquement et rapidement, une section de Poincaré du plan (ξ_3, η_3) avec $\eta_1 = 0$ comme plan de section a été réalisée. La Figure 7.4 montre cette section de Poincaré. L'orbite ainsi obtenue en fixant le premier degré de liberté est une ellipse sans aucune oscillation. Afin de mettre en évidence cette forme lisse de la courbe, le mouvement complet (avec η_1 et ξ_1 variables) et la section ont été superposés (un zoom est présenté à la Figure 7.5). Il est évident que le premier degré de liberté introduit de petites

déformations périodiques rapides sur le second degré de liberté mais ne modifie ni la forme de la courbe ni le comportement dynamique.

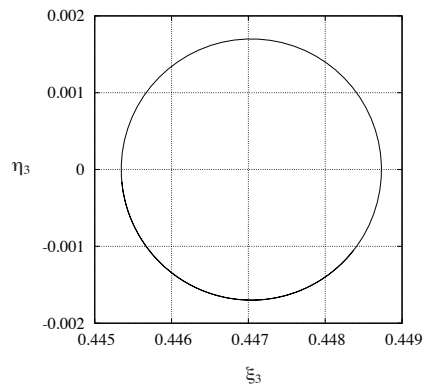


FIG. 7.4 – Section de Poincaré du plan (ξ_3, η_3) pour $\eta_1 = 0$. Le mouvement est caractérisé par une section de type “pendule”.

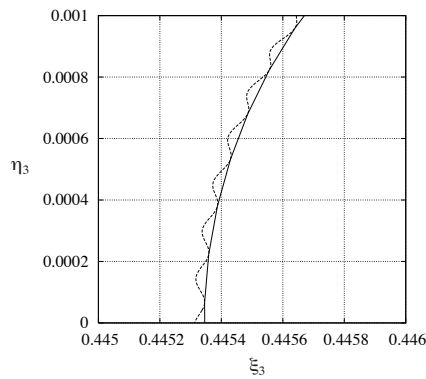


FIG. 7.5 – Superposition de la courbe du mouvement complet (traits pointillés) et de la section de Poincaré (trait plein).

CHAPITRE 8

DÉVELOPPEMENT À DES ORDRES PLUS ÉLEVÉS EN EXCENTRICITÉ

Nous allons, dans ce chapitre, introduire les termes d'ordre 3 et 4 en excentricité comme des perturbations du modèle de base à 3 degrés de liberté. Nous étudierons ensuite leur effet à l'aide de la méthode de Lie rappelée dans la section 3.

8.1 Ordre 3 en excentricité

Nous nous étions limités jusqu'à présent à un développement au second degré en excentricité (4.24). Introduisons ici dans un premier temps les termes en e^3 . L'expression de l'Hamiltonien ainsi obtenu étant très longue¹, nous ne la donnerons pas. Notons toutefois qu'elle dépend maintenant de l'argument du péricentre g_o que nous considérons comme constant ($g_o = 29.12478^\circ$) dans ce chapitre. Toutefois l'équilibre qui nous intéresse (à savoir $(\sigma_1, \lambda_2, \sigma_3) = (0, 0, 0)$, $K = i_o$ et $J = 0$) reste inchangé, tout comme les périodes T_1 et T_2 . Seule T_3 subit une variation de quelques jours.

En effet, après de multiples transformations (passage aux coordonnées cartésiennes, translation à l'équilibre, élimination des termes croisés du deuxième ordre, changement d'échelle – voir chapitre 4 pour plus de détails), notre Hamiltonien moyenné sur les courtes périodes s'écrit, en coordonnées angle-action :

$$\langle \mathcal{H}_3 \rangle = 0.396234 J_1 + 0.0107591 J_2 + 0.00589923 J_3 + 0.0000377819 J_3 \sin(2\psi_3) \quad (8.1)$$

¹plusieurs dizaines de pages dues au grand nombre de termes différents possibles, ces termes étant du type

$$D e^a C_2^b \eta_1^i \eta_2^j \eta_3^k x_1^l \xi_2^m, x_3^n T^p(i_o) S^q(K) R^u(g_o)$$

où D est un coefficient, $a : 0 \rightarrow 3$, $b = 0$ ou 2 , $i, j, k, l, m, n, p, q, u : 0 \rightarrow 2$ et où T, S et R sont soit “cos”, soit “sin”.

où l'on constate qu'à l'ordre de troncature choisi, parmi les coefficients des termes indépendants de la variable angulaire, seul celui du terme en J_3 est différent de celui obtenu pour notre Hamiltonien de base à trois dimensions (voir éq. 5.26). Cette différence implique une augmentation de 3 jours de la période propre T_3 . Une correction de cette valeur sera par la suite apportée en raison de la présence du dernier terme de (8.1).

Nous allons, à présent, moyenniser $\langle \mathcal{H}_3 \rangle$ à l'ordre 2 sur la variable angulaire ψ_3 à l'aide de la technique de Lie. Pour ce faire, nous devons définir les éléments H_0^0 , H_1^0 et H_2^0 du Triangle de Lie (voir chapitre 3). Soit donc

$$H_0^0 = \nu_{31} J_1 + \nu_{32} J_2 + \nu_{33} J_3 \quad (8.2)$$

$$H_1^0 = 0.0000377819 J_3 \sin(2\psi_3) \quad (8.3)$$

$$H_2^0 = 0 \quad (8.4)$$

où les ν_{3i} sont les coefficients des J_i dans l'équation (8.1). L'élément H_0^1 qui est la moyenne de H_1^0 vaut par conséquent 0. Ainsi, par (3.19), le générateur du premier ordre \mathcal{W}_1 est donné par

$$\mathcal{W}_1 = -0.0032 J_3 \cos(2\psi_3). \quad (8.5)$$

Pour le générateur de deuxième ordre, nous devons d'abord calculer \tilde{H}_0^2 (voir éq. 3.20) :

$$\tilde{H}_0^2 = -2.41976 * 10^{-7} J_3. \quad (8.6)$$

Comme \tilde{H}_0^2 ne dépend pas des variables angulaires, on a

$$H_0^2 = \tilde{H}_0^2 \quad (8.7)$$

et par conséquent, par (3.22),

$$\mathcal{W}_2 = 0. \quad (8.8)$$

Notre nouvel Hamiltonien moyenné à l'ordre 2 et exprimé dans les variables $(\bar{J}_i, \bar{\psi}_i)$ est donné par

$$\langle \bar{\mathcal{H}}_3 \rangle = \nu_{31} \bar{J}_1 + \nu_{32} \bar{J}_2 + \nu_{33} \bar{J}_3 + \frac{1}{2}(-2.41976 \times 10^{-7} \bar{J}_3). \quad (8.9)$$

On a donc que

$$\dot{\bar{\psi}}_1 = \nu_{31} \quad (8.10)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_2 = \nu_{32} \quad (8.11)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_3 = \nu_{33} + \frac{1}{2}(-2.41976 \times 10^{-7}) \quad (8.12)$$

ce qui correspond à une augmentation totale de 11 jours de la période propre du troisième degré de liberté par rapport à celle obtenue pour notre Hamiltonien de base à trois dimensions (voir 5.29).

8.2 Ordre 4 en excentricité

L'introduction des termes en e^4 ne modifiera pas non plus notre équilibre ni la période T_1 . Par contre, cette fois l'influence sur les périodes T_2 et T_3 est vraiment significative : -200 jours pour T_2 et -2,79 ans pour T_3 .

Ceci provient principalement du fait qu'en coordonnées angle-action, l'Hamiltonien incluant les termes du quatrième ordre en excentricité est donné par :

$$\langle \mathcal{H}_4 \rangle = 0.396234 J_1 + 0.0107742 J_2 + 0.00591478 J_3 + 0.0000377819 J_3 \sin(2\psi_3) \quad (8.13)$$

où l'on peut noter que les coefficients de J_2 et J_3 sont différents (à la cinquième décimale pour J_2 et à la quatrième décimale pour J_3) de ceux obtenus pour notre Hamiltonien de base à trois dimensions (voir éq. 5.26).

En outre, comme les termes en e^4 ne dépendent pas de g_0 , le coefficient du dernier terme de (8.13) est strictement identique à celui de $\langle \mathcal{H}_3 \rangle$. Nous obtenons, dès lors, par le même raisonnement que précédemment, les générateurs de 1er et 2ème ordre suivants :

$$\mathcal{W}_1 = -0.0032 J_3 \cos(2\psi_3) \quad (8.14)$$

$$\mathcal{W}_2 = 0. \quad (8.15)$$

Les formules (8.6) à (8.12) seront, par conséquent, également valables pour le modèle en e^4 moyennant remplacement des fréquences ν_{3i} par celles de ce modèle développé jusqu'à l'ordre 4.

En conclusion de ce chapitre, si l'on veut affiner le modèle de base, il semble plus judicieux de travailler avec des développements en excentricité d'ordres pairs.

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIES DE η_1, η_3, x_1 ET x_3 DE L'HAMILTONIEN AUX ORDRES 3 ET 4

Nous nous étions jusqu'à présent limités au développement de l'Hamiltonien en séries de η_1, η_3, x_1 et x_3 à l'ordre 2 (voir (4.55)). Nous allons maintenant développer à des ordres plus élevés et voir à quel point ces nouveaux termes, introduits comme des perturbations sur notre modèle de base, sont importants. Nous étudierons leurs effets sur les périodes propres et sur la valeur d'équilibre du moment angulaire Λ_1 , de l'obliquité écliptique K et de l'angle J .

9.1 Ordre 3

Pour obtenir l'expression de notre Hamiltonien à l'ordre 3, nous l'avons développé en série autour de l'équilibre du modèle de base, les termes du troisième ordre agissant donc comme une perturbation.

L'expression de l'Hamiltonien dans les variables η_1, η_3, x_1 et x_3 étant assez longue, nous la donnons dans l'Annexe F. Son expression en variables angle-action est :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_{o3} \rangle = & 0.3962 J_1 + 0.0108 J_2 + 0.0059 J_3 \\ & + 75.3791 J_1^{\frac{3}{2}} \cos \psi_1 + 0.0001 \sqrt{J_1} J_2 \cos \psi_1 \\ & + 0.0054 \sqrt{J_1} J_3 \cos \psi_1 - 75.3714 J_1^{\frac{3}{2}} \cos (3 \psi_1) \\ & + 0.0117 \sqrt{J_1} J_2 \cos (\psi_1 - 2 \psi_2) \\ & - 0.0115 \sqrt{J_1} J_2 \cos (\psi_1 + 2 \psi_2) \\ & - 0.0028 \sqrt{J_1} J_3 \cos (\psi_1 - 2 \psi_3) \\ & - 0.9107 J_1 \sqrt{J_3} \cos (2 \psi_1 - \psi_3) \\ & + 1.7627 10^{-10} J_2 \sqrt{J_3} \cos (2 \psi_2 - \psi_3) \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}
& -0.0137 J_1 \sqrt{J_3} \cos \psi_3 \\
& +0.00007 J_3^{\frac{3}{2}} \cos \psi_3 - 7.3454 10^{-8} J_3^{\frac{3}{2}} \cos (3 \psi_3) \\
& +0.9244 J_1 \sqrt{J_3} \cos (2 \psi_1 + \psi_3) \\
& -1.7627 10^{-10} J_2 \sqrt{J_3} \cos (2 \psi_2 + \psi_3) \\
& -0.0028 \sqrt{J_1} J_3 \cos (\psi_1 + 2 \psi_3).
\end{aligned}$$

Si l'on considère le Triangle de Lie, on peut prendre comme H_0^0 notre Hamiltonien de base,

$$H_0^0 = 0.3962 J_1 + 0.0108 J_2 + 0.0059 J_3 \quad (9.2)$$

et on place dans H_1^0 , tous les autre termes. On a donc que H_1^0 ne contient que des termes périodiques et que H_2^0 est nul. Par la méthode du Triangle de Lie, on obtient :

$$H_0^1 = 0 \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_1 = & 190.239 J_1^{\frac{3}{2}} \sin \psi_1 + 0.0003 \sqrt{J_1} J_2 \sin \psi_1 \\
& +0.0135 \sqrt{J_1} J_3 \sin \psi_1 - 63.4065 J_1^{\frac{3}{2}} \sin (3 \psi_1) \\
& +0.0311 \sqrt{J_1} J_2 \sin (\psi_1 - 2 \psi_2) - 0.0276 \sqrt{J_1} J_2 \sin (\psi_1 + 2 \psi_2) \\
& -0.0072 \sqrt{J_1} J_3 \sin (\psi_1 - 2 \psi_3) - 1.1578 J_1 \sqrt{J_3} \sin (2 \psi_1 - \psi_3) \\
& +1.12859 10^{-8} J_2 \sqrt{J_3} \sin (2 \psi_2 - \psi_3) - 2.3157 J_1 \sqrt{J_3} \sin \psi_3 \\
& +0.0119 J_3^{\frac{3}{2}} \sin \psi_3 - 4.1503 10^{-6} J_3^{\frac{3}{2}} \sin (3 \psi_3) \\
& +1.1578 J_1 \sqrt{J_3} \sin (2 \psi_1 + \psi_3) - 0.0069 \sqrt{J_1} J_3 \sin (\psi_1 + 2 \psi_3) \\
& -6.4291 10^{-9} J_2 \sqrt{J_3} \sin (2 \psi_2 + \psi_3)
\end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned}
H_0^2 = & -43015.7472 J_1^2 - 0.0401 J_1 J_2 - 0.0003 J_2^2 - 6.2862 J_1 J_3 \\
& -1.4278 10^{-6} J_2 J_3 - 0.00006 J_3^2.
\end{aligned} \quad (9.5)$$

\mathcal{W}_2 étant assez long, nous le donnons dans l'Annexe F.

L'Hamiltonien moyenné exprimé dans les variables $(\bar{J}_i, \bar{\psi}_i)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\mathcal{H}}_{o3} \rangle = & H_0^0 + \frac{1}{2} H_0^2 \\
= & 0.3962 \bar{J}_1 - 21507.8736 \bar{J}_1^2 + 0.0108 \bar{J}_2 \\
& -0.0201 \bar{J}_1 \bar{J}_2 - 0.0002 \bar{J}_2^2 + 0.0059 \bar{J}_3 \\
& -3.1431 \bar{J}_1 \bar{J}_3 - 7.1389 10^{-7} \bar{J}_2 \bar{J}_3 \\
& -0.00003 \bar{J}_3^2
\end{aligned} \quad (9.6)$$

et, par conséquent,

$$\dot{\bar{\psi}}_1 = 0.3962 - 43015.7 \bar{J}_1 - 0.0201 \bar{J}_2 - 3.1431 \bar{J}_3 \quad (9.7)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_2 = 0.0108 - 0.0201 \bar{J}_1 - 0.0003 \bar{J}_2 - 7.1389 \cdot 10^{-7} \bar{J}_3 \quad (9.8)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_3 = 0.0059 - 3.1431 \bar{J}_1 - 7.1389 \cdot 10^{-7} \bar{J}_2 - 0.0001 \bar{J}_3. \quad (9.9)$$

On voit donc, dans chaque cas, que les fréquences propres de base (nous appellerons “fréquences propres de base”, les fréquences obtenues en ne considérant, dans l’expression de l’Hamiltonien donné en variables angle-action, que les termes indépendants des variables angulaires) peuvent être assez bien modifiées, le terme en \bar{J}_1 étant celui dont l’influence est la plus importante.

Par ailleurs, si l’on exprime la norme du moment angulaire Λ_1 , l’obliquité écliptique K et l’angle J en fonction des (J_i, ψ_i) , on peut montrer l’influence des termes du 3ème ordre sur la valeur d’équilibre obtenue pour notre modèle de base :

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & 13.303 + 0.519 \sqrt{J_1} \cos \psi_1 + 0.005 J_1 \cos^2 \psi_1 \\ & + 5.3 \cdot 10^{-7} \sqrt{J_3} \cos \psi_3 + 1.034 \cdot 10^{-8} \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos \psi_1 \cos \psi_3 \\ & + 197.492 J_1 \sin^2 \psi_1 - 2.404 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \sin \psi_1 \sin \psi_3 \\ & + 0.007 J_3 \sin^2 \psi_3 \end{aligned} \quad (9.10)$$

$$\begin{aligned} K = & \arccos (0.993 - 0.003 \sqrt{J_1} \cos \psi_1 - 0.0004 J_1 \cos^2 \psi_1 \\ & - 3.44 \cdot 10^{-9} \sqrt{J_3} \cos \psi_3 - 7.772 \cdot 10^{-10} \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos \psi_1 \cos \psi_3 \\ & + 1.541 \cdot 10^{-7} \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \sin \psi_1 \sin \psi_3 - 0.075 J_3 \sin^2 \psi_3) \end{aligned} \quad (9.11)$$

$$J = \arccos (1 - 0.138 J_2 \cos^2 \psi_2 - 0.041 J_2 \sin^2 \psi_2). \quad (9.12)$$

Afin d’obtenir des bornes inférieure et supérieure de ces grandeurs en fonction des J_i , nous avons recherché les valeurs des ψ_i qui minimisent ou maximisent leur expression lorsque l’on s’écarte de l’équilibre exact $J_i = 0$ (voir Tableau 9.1). Les Figures 9.1, 9.2 et 9.3 illustrent le comportement de Λ_1 , K et J en fonctions des J_i pour ces valeurs de ψ_i .

9.2 Ordre 4

Pour l’ordre 4, nous avons effectué exactement la même démarche. Les expressions étant très longues, nous les donnons dans l’Annexe G.

L’Hamiltonien moyenné exprimé dans les variables $(\bar{J}_i, \bar{\psi}_i)$ est donné par

$$\langle \bar{\mathcal{H}}_{o4} \rangle = H_0^0 + H_0^1 + \frac{1}{2} H_0^2 \quad (9.13)$$

	ψ_1	ψ_2	ψ_3
Λ_{min}	π		π
Λ_{max}	$\pi/2$		$\pi/2$
K_{min}	0		$\pi/2$
K_{max}	π		0
J_{min}		0	
J_{max}		$\pi/2$	

TAB. 9.1 – Valeurs des ψ_i qui minimisent ou maximisent les expressions de Λ_1, K et J lorsque l'on s'écarte de l'équilibre exact $J_i = 0$.

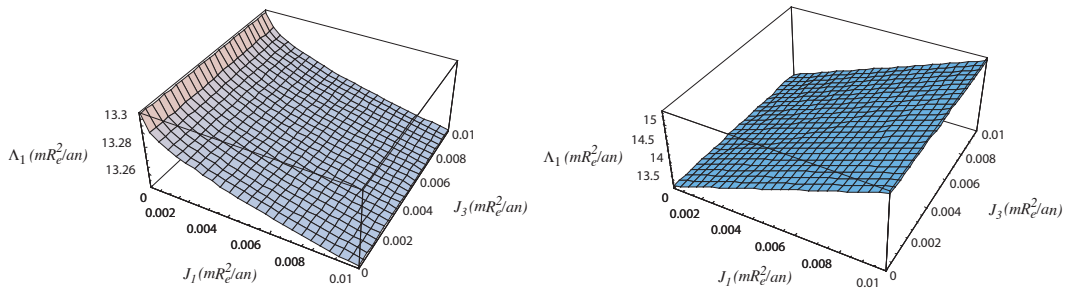


FIG. 9.1 – Le graphique de gauche montre l'évolution de Λ_1 lorsque J_1 et J_3 varient de 0 à 0.01 pour les valeurs de ψ_1 et ψ_3 qui minimisent l'expression de Λ_1 . Le graphique de droite donne les valeurs possibles de Λ_1 pour les valeurs de ψ_1 et ψ_3 qui maximisent l'expression de Λ_1 .

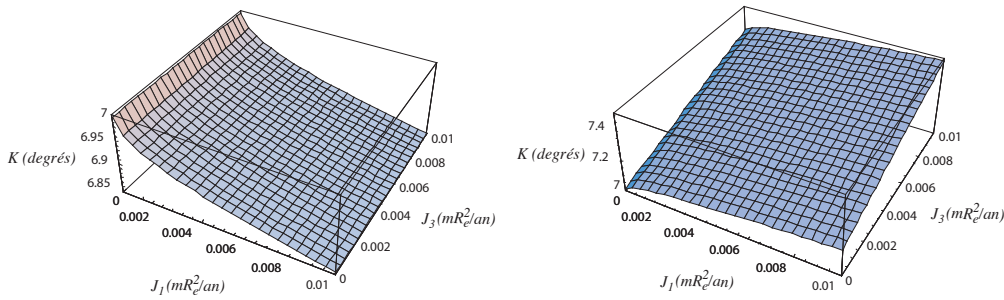


FIG. 9.2 – Le graphique de gauche montre l'évolution de K lorsque J_1 et J_3 varient de 0 à 0.01 pour les valeurs de ψ_1 et ψ_3 qui minimisent l'expression de K . Le graphique de droite donne les valeurs possibles de K pour les valeurs de ψ_1 et ψ_3 qui maximisent l'expression de K .

où

$$H_0^0 = 0.3962 \bar{J}_1 + 0.0108 \bar{J}_2 + 0.0059 \bar{J}_3 \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} H_0^1 = & 21507.1383 \bar{J}_1^2 + 0.0312 \bar{J}_1 \bar{J}_2 - 0.0005 \bar{J}_2^2 \\ & + 3.1285 \bar{J}_1 \bar{J}_3 - 0.001 \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 0.0008 \bar{J}_3^2 \end{aligned} \quad (9.15)$$

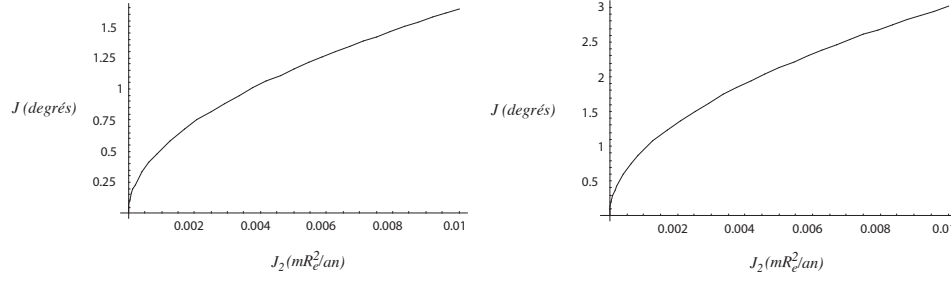


FIG. 9.3 – Le graphique de gauche montre l'évolution de J lorsque J_2 varie de 0 à 0.01 pour la valeur de ψ_2 qui minimise l'expression de J . Le graphique de droite donne les valeurs possibles de J pour la valeur de ψ_2 qui maximise l'expression de J .

$$\begin{aligned}
 H_0^2 = & -43015.7471 \bar{J}_1^2 - 4.4099 \cdot 10^9 \bar{J}_1^3 - 0.0401 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \\
 & -6775.809 \bar{J}_1^2 \bar{J}_2 - 0.0003 \bar{J}_2^2 - 0.0035 \bar{J}_1 \bar{J}_2^2 \\
 & -0.00001 \bar{J}_2^3 - 2.768 \bar{J}_1^2 \sqrt{\bar{J}_3} - 6.2868 \bar{J}_1 \bar{J}_3 \\
 & -2.9865 \cdot 10^6 \bar{J}_1^2 \bar{J}_3 - 1.4279 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2 \bar{J}_3 \\
 & -1.7863 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 4.1005 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2^2 \bar{J}_3 + 0.0236 \bar{J}_1 \bar{J}_3^{3/2} \\
 & -0.0001 \bar{J}_3^2 - 137.0684 \bar{J}_1 \bar{J}_3^2 - 0.00002 \bar{J}_2 \bar{J}_3^2 - 0.001 \bar{J}_3^3. \quad (9.16)
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne en groupant les termes :

$$\begin{aligned}
 \langle \bar{\mathcal{H}}_{o4} \rangle = & 0.396 \bar{J}_1 - 0.735 \bar{J}_1^2 - 2.205 \cdot 10^9 \bar{J}_1^3 + 0.011 \bar{J}_2 + 0.0112 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \\
 & -3387.905 \bar{J}_1^2 \bar{J}_2 - 0.0006 \bar{J}_2^2 - 0.002 \bar{J}_1 \bar{J}_2^2 - 6.364 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2^3 \\
 & -1.384 \bar{J}_1^2 \sqrt{\bar{J}_3} + 0.006 \bar{J}_3 - 0.015 \bar{J}_1 \bar{J}_3 - 1.493 \cdot 10^6 \bar{J}_1^2 \bar{J}_3 \\
 & -0.001 \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 0.893 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 2.05 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2^2 \bar{J}_3 + 0.012 \bar{J}_1 \bar{J}_3^{3/2} \\
 & -0.0002 \bar{J}_3^2 - 68.534 \bar{J}_1 \bar{J}_3^2 - 0.00001 \bar{J}_2 \bar{J}_3^2 - 0.0005 \bar{J}_3^3 \quad (9.17)
 \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_1 = & 0.396 - 1.471 \bar{J}_1 - 6.615 \cdot 10^9 \bar{J}_1^2 + 0.0112 \bar{J}_2 - 6775.809 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \\
 & -0.002 \bar{J}_2^2 - 2.768 \bar{J}_1 \sqrt{\bar{J}_3} - 0.0149 \bar{J}_3 - 2.987 \cdot 10^6 \bar{J}_1 \bar{J}_3 \\
 & -0.893 \bar{J}_2 \bar{J}_3 + 0.012 \bar{J}_3^{3/2} - 68.534 \bar{J}_3^2 \quad (9.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_2 = & 0.0108 + 0.0112 \bar{J}_1 - 3387.905 \bar{J}_1^2 - 0.001 \bar{J}_2 - 0.003 \bar{J}_1 \bar{J}_2 - 0.001 \bar{J}_3 \\
 & -0.00002 \bar{J}_2^2 - 0.893 \bar{J}_1 \bar{J}_3 - 4.101 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 0.00001 \bar{J}_3^2 \quad (9.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_3 = & 0.006 - 0.015 \bar{J}_1 - 1.493 \cdot 10^6 \bar{J}_1^2 - 0.001 \bar{J}_2 - 0.893 \bar{J}_1 \bar{J}_2 \\
& - 2.050 \cdot 10^{-6} \bar{J}_2^2 - 0.692 \bar{J}_1^2 \frac{1}{\sqrt{\bar{J}_3}} + 0.018 \bar{J}_1 \sqrt{\bar{J}_3} - 0.0004 \bar{J}_3 \\
& - 137.068 \bar{J}_1 \bar{J}_3 - 0.00002 \bar{J}_2 \bar{J}_3 - 0.002 \bar{J}_3^2.
\end{aligned} \tag{9.20}$$

A nouveau, on constate, dans chaque cas, que les termes dominants sont ceux qui contiennent \bar{J}_1 ou une de ses puissances.

L'introduction des termes d'ordres 3 et 4 n'ont pas modifié fondamentalement les valeurs des périodes et des équilibres, lorsqu'on reste proche de l'équilibre de Cassini (\bar{J}_1, \bar{J}_2 et \bar{J}_3 très petits) ; les termes contenant \bar{J}_1 et ses puissances sont les seuls à jouer un (petit) rôle dans ces corrections de fréquences, ceux en \bar{J}_2 et \bar{J}_3 pouvant être carrément négligés. Si nous retournons le problème, et souhaitons obtenir des variations significatives des périodes, mesurables, il faut s'éloigner de l'équilibre de Cassini de façon nette, ce qui ne correspond pas à notre objectif de modélisation du "vrai" Mercure, toujours considéré comme quasi bloqué à l'état de Cassini n°1.

CHAPITRE 10

e ET i_o COMME FONCTIONS LENTES DU TEMPS

Peale (1974) a montré que les frictions de marées doivent amener l'axe du moment angulaire de Mercure dans l'état de Cassini n°1 (ou, ce qui revient au même dans notre modèle sans perturbation planétaire, à l'équilibre K_1) à partir de n'importe quelle condition initiale. De plus, la dissipation entre le noyau liquide et le manteau solide doit accélérer ce processus dans une échelle de temps de 10^5 ans (Peale, 2005). Toutefois, des variations des éléments orbitaux pourraient modifier la position de l'état de Cassini et donc empêcher l'axe du moment angulaire de suivre exactement cet état. Mais grâce à la théorie de l'invariant adiabatique, Goldreich et Toomre (1969) et Peale (1974, 2006) ont montré que si les périodes des variables angulaires sont courtes par rapport aux périodes de dissipation, l'axe du moment angulaire reste très proche de l'état de Cassini.

L'étape suivante dans notre étude de la rotation à longue période de Mercure serait donc l'abandon de l'approximation képlérienne et l'introduction d'une théorie séculaire du mouvement orbital de Mercure pour e , i_o , g_o et h_o . Ces théories existent dans la littérature (entre autres dans Bretagnon, (1982, 1990, 1996, 1997), Laskar (1985), Simon et al. (1994), Moisson & Bretagnon (2001), Peale (2006)) et sont en général données sous forme de séries trigonométriques :

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \sum_{\phi} A_{\phi} \cos \phi \\ \lambda_o &= \lambda_{o0} + n_{o0} t + \sum_{\phi} B_{\phi} \sin \phi \\ e \cos(g_o + h_o) &= \sum_{k=1}^8 M_k \cos \psi_k + \sum_{\phi} C_{\phi} \cos \phi \\ e \sin(g_o + h_o) &= \sum_{k=1}^8 M_k \sin \psi_k + \sum_{\phi} D_{\phi} \sin \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \frac{i_o}{2} \cos h_o &= \sum_{k=1}^8 N_k \cos \theta_k + \sum_{\phi} E_{\phi} \cos \phi \\ \sin \frac{i_o}{2} \sin h_o &= \sum_{k=1}^8 N_k \sin \theta_k + \sum_{\phi} F_{\phi} \sin \phi\end{aligned}\quad (10.1)$$

où

$$\phi = \sum_{j=1}^8 r_j \bar{\lambda}_j + \sum_{j=1}^8 l_j \psi_j + \sum_{j=1}^8 m_j \theta_j \quad (10.2)$$

avec λ_o la longitude moyenne de Mercure et $\bar{\lambda}_j$, ψ_j , θ_j , respectivement l'argument de la longitude, l'argument de la solution de Lagrange en excentricité et l'argument de la solution de Lagrange en inclinaison de la planète j . Les angles intervenant dans les membres de gauche de ces expressions sont à très longues périodes : environ 282428 ans pour le péricentre g_o et environ 131448 ans pour le nœud h_o .

Dès lors, si nous voulions continuer sur le même schéma, sans modifier notre façon de faire, il nous faudrait introduire dans notre Hamiltonien (déjà moyennisé sur les courtes périodes, puis sur les périodes fondamentales de la rotation, respectivement de l'ordre de 16, 590 et 1065 ans) des angles dont la période est 100 fois plus élevée que les variables internes de la rotation.

Nous avons donc préféré reprendre l'idée de Peale (2006) et utiliser l'invariant adiabatique, pour introduire cette lente variation de l'excentricité et de l'inclinaison dans le mouvement. L'intérêt principal de cette procédure est, comme nous allons le rappeler dans la section 10.1, que nous procédons (théoriquement) à une moyennisation sur les angles ψ_i gagnant par la même occasion un facteur 100 dans les fréquences. Dans la pratique, cette moyennisation n'est pas effectuée, elle ne sert qu'à prouver le caractère adiabatique du processus et à le quantifier. En effet, la transformation finale (de J en \bar{J}) n'est présente que pour la justification et l'évaluation des temps d'adiabaticité (voir section 10.1.2).

Signalons que nous avons voulu garder le couplage entre les degrés de liberté 1 et 3 de notre problème ; nous avons ainsi :

- généralisé l'approche de Peale à 2 degrés de liberté,
- calculé effectivement les transformations successives de cet invariant adiabatique,
- chiffré l'influence de chacune d'entre elles par rapport à l'approximation képlérienne.

Dans ce dernier chapitre, nous considérerons donc, à tour de rôle, l'excentricité e et l'inclinaison i_o non plus comme des constantes mais comme des fonctions lentes du temps. Cela nous permettra d'évaluer l'importance de l'erreur commise si l'on s'écarte de la valeur constante prise comme valeur de référence. Pour ce faire, nous étudierons, la fonction “reste” pour chaque transformation que nous avons utilisée pour passer de notre jeu de variables de base aux va-

riables angle-action (voir section 4.8).

10.1 Rappel théorique : l'invariant adiabatique

10.1.1 Paramètre indépendant du temps

Soit l'Hamiltonien intégrable à 1 degré de liberté

$$H(q, p, b) = h \quad (10.3)$$

où q est la variable, p le moment associé et b un paramètre indépendant du temps et tel que toutes les trajectoires sont fermées, périodiques, simples et non singulières.

Il existe une transformation canonique permettant de passer de ces variables aux variables angle-action (ψ, J) de sorte que l'Hamiltonien exprimé dans ces variables ne dépendent plus de l'angle ψ :

$$H(q, p, b) = h = K(J, b). \quad (10.4)$$

Ainsi

$$\dot{\psi} = \frac{\partial K}{\partial J} = \omega(J, b) = cste \quad (10.5)$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial K}{\partial \psi} = 0. \quad (10.6)$$

Dès lors, nous avons :

$$\psi = \omega t + \psi_0 \quad (10.7)$$

$$J = J_0. \quad (10.8)$$

On peut montrer que J est, à 2π près, l'aire sous-tendue par l'orbite (fermée) dans le plan de phase (q, p) :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \quad (10.9)$$

En outre, la fonction génératrice $S(q, J, b)$ liant les anciennes et les nouvelles variables est telle que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad (10.10)$$

$$\psi = \frac{\partial S}{\partial J} \quad (10.11)$$

et dépend du paramètre b .

10.1.2 Paramètre dépendant du temps

Supposons, à présent que notre paramètre soit une fonction lente du temps :

$$b = \varepsilon t \quad \text{avec } \varepsilon \ll 1. \quad (10.12)$$

Notre Hamiltonien $H(q, p, \varepsilon t)$ n'est plus constant car $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ et s'écrit donc, exprimé dans les variables angle-action :

$$H(q, p, b) = \tilde{K}(J, \psi, \varepsilon t) = K(J, \varepsilon t) + \frac{\partial S}{\partial t}(J, \psi, \varepsilon t) \quad (10.13)$$

où

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial b} = \varepsilon R(J, \psi, \varepsilon t) \quad (10.14)$$

avec $R(J, \psi, \varepsilon t) = \frac{\partial S}{\partial b}(J, \psi, \varepsilon t)$ la fonction “correctrice”.

Si nous voulons, maintenant, éviter que le temps apparaisse explicitement dans notre problème, nous pouvons poser $b = \varepsilon t$ comme une nouvelle variable et lui associer un moment conjugué B tel que la transformation reste canonique. Notre Hamiltonien aura alors 2 degrés de liberté et prendra la forme :

$$K'(J, \psi, b, B) = K(J, b) + \varepsilon R(J, \psi, b) + \varepsilon B \quad (10.15)$$

avec

$$\dot{J} = -\frac{\partial K'}{\partial \psi} \quad \dot{B} = -\frac{\partial K'}{\partial b} \quad (10.16)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial K'}{\partial J} \quad \dot{b} = \frac{\partial K'}{\partial B} = \varepsilon. \quad (10.17)$$

De plus, dans la section 3, nous avons vu que nous pouvions passer (voir éqs. 3.3 à 3.7) d'un Hamiltonien

$$H(J, \psi) = H_0(J) + \sum_i \frac{\varepsilon^i}{i!} H_i(J, \psi) \quad (10.18)$$

à un Hamiltonien moyenné

$$\bar{H}(\bar{J}, \bar{\psi}) = \bar{H}(\bar{J}) + R(\bar{J}, \bar{\psi}) \quad (10.19)$$

où $\bar{H}(\bar{J}) = \sum_{i=0}^N \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\bar{J})$.

Ce qui, appliqué à notre problème dépendant d'un paramètre, nous permet d'écrire :

$$\bar{K}(\bar{J}, \bar{\psi}, \bar{b}, \bar{B}) = \bar{K}(\bar{J}, \bar{b}) + \varepsilon \bar{B} + \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon^i}{i!} H_0^i(\bar{J}, \bar{b}) + O(\varepsilon^{N+1}). \quad (10.20)$$

La dépendance en ψ étant ainsi reléguée à l'ordre ε^{N+1} ,

$$\dot{\bar{J}} = -\frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{\psi}} = O(\varepsilon^{N+1}) \quad (10.21)$$

$$\dot{\bar{\psi}} = \frac{\partial \bar{K}}{\partial \bar{J}} = \omega + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (10.22)$$

En intégrant l'équation (10.21), on obtient la relation suivante :

$$|\bar{J}(t) - \bar{J}(0)| \leq C \varepsilon^{N+1} |t| \quad (10.23)$$

qui exprime que \bar{J} ne varie pas plus de ε sur des temps de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon^N}$.

Une autre façon d'interpréter cette relation, est de l'écrire sous la forme

$$|\bar{J}(t) - \bar{J}(0)| \leq C \varepsilon^N \quad (10.24)$$

qui se traduit par : \bar{J} ne varie pas plus de ε^N sur des temps d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$. Le choix de l'une ou l'autre formulation dépend du but recherché : soit on met l'accent sur de très longues durées (éq. 10.23), soit on se focalise sur l'écart par rapport à la position initiale (éq. 10.24) en travaillant sur des temps plus courts.

Une dernière relation intéressante concerne les variables non moyennées :

$$|J(t) - J(0)| \leq C \varepsilon \quad \forall t \leq \frac{1}{\varepsilon^N}. \quad (10.25)$$

En effet, comme nous avons

$$J = \bar{J} + \varepsilon [\bar{J}; W_1] + O(\varepsilon^2) \quad (10.26)$$

$$\psi = \bar{\psi} + \varepsilon [\bar{\psi}; W_1] + O(\varepsilon^2), \quad (10.27)$$

et avec (10.24), on peut démontrer (10.25) :

$$\begin{aligned} |J(t) - J(0)| &\leq |J(t) - \bar{J}(t)| + |\bar{J}(t) - \bar{J}(0)| + |\bar{J}(0) - J(0)| \\ &\leq O(\varepsilon) + \tilde{C} \varepsilon^{N+1} + O(\varepsilon) \\ &\leq C \varepsilon. \end{aligned}$$

Cette dernière relation permet de dire que J est un invariant adiabatique c'est-à-dire une quantité quasi invariante (à ε près) sur des périodes très longues ($< \frac{1}{\varepsilon}$).

Géométriquement, cela signifie que l'aire sous-tendue par une orbite (fermée, simple et non singulière) ne varie pratiquement pas sur des temps très longs. D'un point de vue dynamique, cette caractéristique peut être exprimée par le fait que si l'on est proche d'un équilibre, on en restera proche même si le modèle est perturbé par une fonction lente du temps.

10.2 Application au cas de Mercure

Peale (2006) a étudié numériquement la déviation de l'axe du moment angulaire par rapport à l'état de Cassini lorsque l'on considère que les éléments orbitaux sont des fonctions lentes du temps (cette dépendance en temps étant due à la perturbation induite par les autres planètes du Système Solaire).

On peut voir sur la Figure 10.1 (tirée de Peale (2006) d'après les données de Quinn et al (1991)), l'évolution de l'excentricité et de l'inclinaison par rapport à l'écliptique (J2000) sur 3 millions d'années. A partir de ces données, Peale a calculé l'écart δ entre l'axe du moment

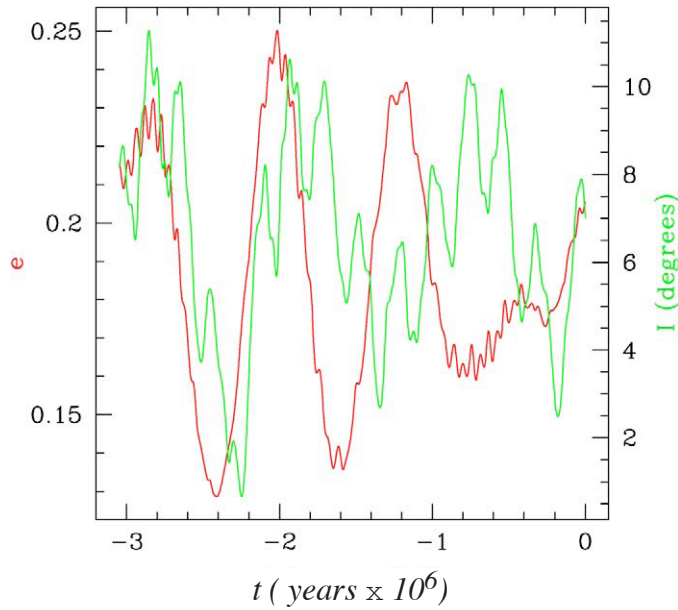


FIG. 10.1 – Variation de l'excentricité et de l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan de l'écliptique (J2000) obtenue à partir des données de Quinn et al (1991).

angulaire et l'état de Cassini et a obtenu, pour un écart initial de 0 arcsec, des valeurs comprises entre 1 et 3 arcsec selon l'ensemble de points sur lequel l'interpolation a été effectuée. Ce faible écartement lui permet d'affirmer que l'angle solide décrit par l'axe du moment angulaire est un invariant adiabatique. Notons que Peale a appliqué la théorie de l'invariant adiabatique sur un seul degré de liberté (correspondant, dans notre modèle, à (σ_3, Λ_3)). Enfin, considérant que l'excentricité et l'inclinaison sont, au premier ordre, des fonctions lentes du temps du type :

$$I = I_0 + A_I \sin \frac{2\pi t}{P_I} \quad (10.28)$$

$$e = e_0 + A_e \sin \frac{2\pi t}{P_e} + \phi \quad (10.29)$$

où A_n est l'amplitude, P_n la période et ϕ un déphasage, il a testé différentes amplitudes et différentes périodes et étudié leur incidence sur la séparation entre l'axe du moment angulaire et l'état de Cassini. Une des conclusions de cette analyse est que les variations en inclinaison ont beaucoup plus de poids que les variations en excentricité. Les Figures 10.2 et 10.3 (également tirées de Peale (2006)) montrent respectivement la variation de δ obtenue à partir des données de Quinn et à partir des expressions (10.28) et (10.29).

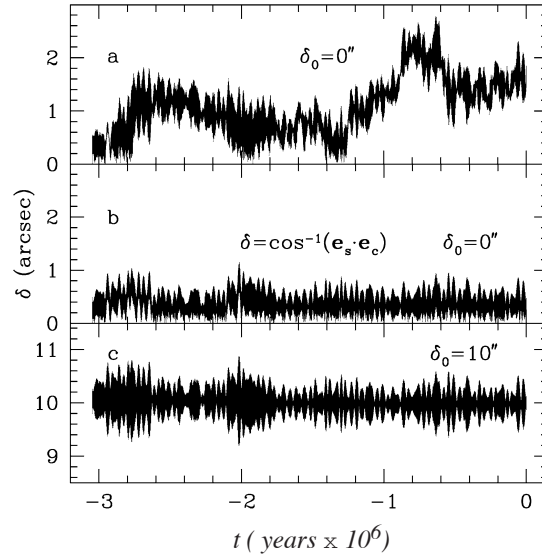


FIG. 10.2 – Séparation δ de l'axe du moment angulaire et de l'état de Cassini n°1 avec e , I , Ω , $\frac{dI}{dt}$ et $\frac{d\omega}{dt}$ obtenus à partir des simulations de Quinn. L'axe du moment angulaire est initialement à l'état de Cassini dans les graphes (a) et (b) et séparé de 10 arcsec dans le graphe (c). L'écart $\delta(t)$ est construit sur différents ensembles de points dans les graphes (a) et (b).

Yseboodt & Margot (2005) ont aussi introduit, sans le mentionner explicitement, l'adiabaticité dans leur modèle en y ajoutant la perturbation due aux planètes. En effet, à partir d'une configuration sans perturbation planétaire pour laquelle l'état de Cassini est connu et l'obliquité est nulle, ils ont introduit l'effet des planètes suffisamment doucement de sorte que l'état de Cassini soit préservé malgré la précession du plan orbital. Ils ont, pour ce faire, considéré que la masse initiale des planètes perturbatrices était nulle et l'ont augmentée graduellement (voir Figure 10.4 - tirée de leur papier).

Notre spécificité va être d'appliquer cette théorie à deux degrés de liberté $((\sigma_1, \Lambda_1)$ et $(\sigma_3, \Lambda_3))$ et de donner une estimation des fonctions "restes" correspondantes.

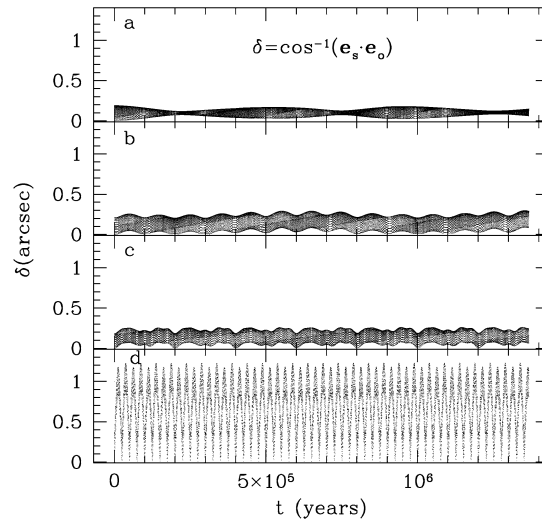


FIG. 10.3 – Séparation δ de l’axe du moment angulaire et de l’état de Cassini n°1 pour des variations périodiques de l’inclinaison I et de l’excentricité e avec δ initialement nul. (a) $A_I = 5.5^\circ$, $P_I = 10^6$ ans, $A_e = 0.06$, $P_e = 8 \cdot 10^5$ ans ; (b) $A_I = 1.5^\circ$, $P_I = 2 \cdot 10^5$ ans, $A_e = 0.06$, $P_e = 8 \cdot 10^5$ ans ; (c) $A_I = 1.5^\circ$, $P_I = 2 \cdot 10^5$ ans, $A_e = 0.01$, $P_e = 5 \cdot 10^4$ ans ; (d) $A_I = 0.6^\circ$, $P_I = 5 \cdot 10^4$ ans, $A_e = 0.01$, $P_e = 5 \cdot 10^4$ ans.

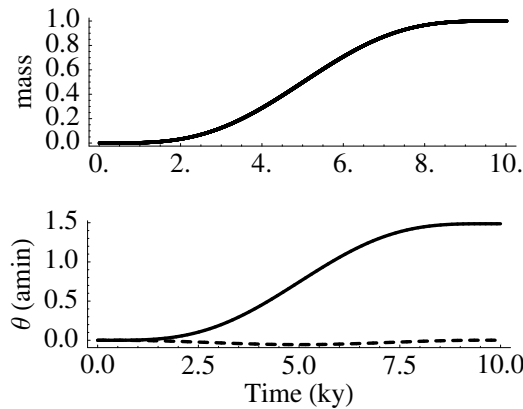


FIG. 10.4 – Le graphe du haut illustre la manière “douce” dont les masses des planètes perturbatrices ont été introduites tandis que celui du bas montre l’évolution correspondante de l’obliquité θ sur une période de 10000 ans. L’obliquité ne présente pas d’oscillations car les masses sont augmentées graduellement à partir de l’état de Cassini non perturbé. La ligne pointillée montre l’écart entre l’axe du moment angulaire et l’état de Cassini.

10.2.1 Passage aux coordonnées cartésiennes

Partons donc à nouveau de notre modèle de base à 2 degrés de liberté (4.24) où nous avons choisi de nommer \mathcal{K} l'Hamiltonien moyenné $\langle \mathcal{H} \rangle$ par souci de lisibilité. Nous avons ainsi :

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \mathcal{K} = \mathcal{K}_0(\sigma_1, \sigma_3, \Lambda_1, \Lambda_3, \lambda) \quad (10.30)$$

où λ est une variable qui représente soit e , soit $\sin i_o$. Notons que l'indice "0" signifie que l'on travaille avec l'Hamiltonien de base.

Lorsque nous passons en coordonnées cartésiennes $(\eta_i, \xi_i)_{i=1,3}$ (voir éqs. 4.50, 4.51, 4.52 et 4.52), cet Hamiltonien devient :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0(\eta_1, \eta_3, \xi_1, \xi_3, \lambda) + \dot{\lambda} \Lambda \quad (10.31)$$

où Λ est le moment conjugué associé à λ .

10.2.2 Translation à l'équilibre

La transformation suivante était une translation permettant de placer l'équilibre à l'origine (éqs. 4.53 et 4.54), elle devient ici :

$$\eta_1 = \eta_1 \quad (10.32)$$

$$x_1 = \xi_1 - \xi_1^*(\lambda) \quad (10.33)$$

$$\eta_3 = \eta_3 \quad (10.34)$$

$$x_3 = \xi_3 - \xi_3^*(\lambda) \quad (10.35)$$

$$\lambda' = \lambda \quad (10.36)$$

$$\Lambda' = \Lambda - \rho(\eta_1, \eta_3, \xi_1, \xi_3, \lambda) \quad (10.37)$$

où les $\xi_i^*(\lambda)$ sont les valeurs à l'équilibre des ξ_i (et dépendent donc de λ) et ρ est une fonction "reste" exprimant la variation que subit Λ pour que la transformation reste canonique. Nous déterminons cette fonction ρ en utilisant la propriété suivante :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation soit canonique est que

$$[Y_i; Y_j] = \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \pm n \\ = 1 & \text{si } i = j - n \\ = -1 & \text{si } i = j + n \end{cases} \quad (10.38)$$

où les Y_k sont, pour $k = 1, \dots, n$, les nouvelles variables et, pour $k = n + 1, \dots, 2n$, les nouveaux moments associés, et $[;]$ les crochets de Poisson dont la définition est :

$$[Y_i; Y_j] = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial Y_i}{\partial q_k} \frac{\partial Y_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Y_i}{\partial p_k} \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} \quad (10.39)$$

où les q_k sont nos anciennes variables et les p_k nos anciens moments.

Calculons donc les crochets de Poisson utiles à la détermination de ρ :

$$\begin{aligned} [\eta_1; \Lambda'] &= \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \eta_1} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \eta_3} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi_3} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \eta_3} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \Lambda} - \frac{\partial \eta_1}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \lambda} \\ &= -\frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} - 0 + 0 - 0 + 0 - 0, \end{aligned} \quad (10.40)$$

$$\begin{aligned} [x_1; \Lambda'] &= \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi_1} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \eta_1} + \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \eta_3} + \frac{\partial x_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \Lambda} - \frac{\partial x_1}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda'}{\partial \lambda} \\ &= 0 - \left(-\frac{\partial \rho}{\partial \eta_1}\right) - 0 + 0 - 0 + \left(-\frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda}\right) - 0, \end{aligned} \quad (10.41)$$

et en égalant (10.40) et (10.41) à 0, on trouve

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi_1} = 0 \quad (10.42)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda}. \quad (10.43)$$

On obtient de la même façon, pour $[\eta_3; \Lambda']$ et $[x_3; \Lambda']$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial \xi_3} = 0 \quad (10.44)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \eta_3} = \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda}. \quad (10.45)$$

ρ peut par conséquent s'exprimer de la façon suivante :

$$\rho(\eta_1, \eta_3, \lambda) = \eta_1 \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda} + \eta_3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda} \quad (10.46)$$

où il nous reste à déterminer $\frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda}$. Pour cela, nous partons du fait que

$$\left. \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial \xi_1} \right|_{\acute{e}q} = 0, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial \xi_3} \right|_{\acute{e}q} = 0 \quad (10.47)$$

où $\frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial \xi_i} |_{\text{éq}}$ est la dérivée de \mathcal{K}_0 par rapport à ξ_i prise à l'équilibre du modèle de base.

Si l'on dérive ces expressions par rapport à λ , on obtient

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial \xi_1} |_{\text{équil}} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \xi_1^2} |_{\text{éq}} \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \xi_3 \partial \xi_1} |_{\text{éq}} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \lambda \partial \xi_1} |_{\text{éq}} = 0 \quad (10.48)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{K}_0}{\partial \xi_3} |_{\text{équil}} = \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_3} |_{\text{éq}} \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \xi_3^2} |_{\text{éq}} \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{K}_0}{\partial \lambda \partial \xi_3} |_{\text{éq}} = 0. \quad (10.49)$$

En résolvant ce système, on trouve¹

- avec $\lambda = e$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda} &= \frac{2.3 \cdot 10^{-10} + 2 \cdot 10^{-10} e - 1.5 \cdot 10^{-9} e^2}{78.3 + 0.00004 e + 0.00005 e^2 - 0.00009 e^3} \\ \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda} &= \frac{8.9 \cdot 10^{-14} + 1.8 \cdot 10^{-13} e - 3.6 \cdot 10^{-13} e^2}{0.4 + 0.4 e + 0.5 e^2 - 0.9 e^3} \end{aligned} \quad (10.50)$$

- avec $\lambda = \sin i_o$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda} &= \frac{8.3 \cdot 10^{-9} - 2.7 \cdot 10^{-8} \sin i_o + 1.6 \cdot 10^{-7} \sin^2 i_o}{-1.3 \cdot 10^{-3} \sin i_o + 3.8 \cdot 10^{-4} \cos i_o} \\ &\quad + \frac{2.3 \cdot 10^{-9} \cos i_o - 9.5 \cdot 10^{-8} \sin i_o \cos i_o}{-1.3 \cdot 10^{-3} \sin i_o + 3.8 \cdot 10^{-4} \cos i_o} \\ \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda} &= \frac{-1.5 + 3 \sin^2 i_o - 0.1 \cos i_o - 0.7 \sin i_o \cos i_o}{-0.04 - 0.2 \sin i_o - 0.4 \cos i_o + 0.8 \sin^2 i_o \cos i_o}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Pour cette première transformation, on voit donc que l'effet de l'excentricité est quasiment négligeable alors que l'inclinaison joue un rôle relativement important.

Après cette transformation, notre Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{0,2}(\eta_1, \eta_3, x_1, x_3, \lambda') + \mathcal{K}_{0,p}(\eta_1, \eta_3, x_1, x_3, \lambda') + \dot{\lambda}' \Lambda' + \dot{\lambda}' (\eta_1 \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda'} + \eta_3 \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda'}) \quad (10.52)$$

où $\mathcal{K}_{0,2}$ ne contient que les termes d'ordre 2 du développement en série (voir Annexe H) et $\mathcal{K}_{0,p}$ tous les autres termes.

¹Nous ne fournissons ici que les expressions numériques, les expressions analytiques étant considérablement longues.

10.2.3 Untangling Transformation

Nous devons ensuite effectuer une transformation appelée “untangling” (voir section 4.8.3) afin d’éliminer les termes croisés. Son écriture en fonction du “paramètre” λ' est la suivante :

$$\eta_1 = r - \beta(\lambda') s \quad (10.53)$$

$$\eta_3 = (1 - \alpha(\lambda') \beta(\lambda')) s + \alpha(\lambda') r \quad (10.54)$$

$$x_1 = R (1 - \alpha(\lambda') \beta(\lambda')) - \alpha(\lambda') S \quad (10.55)$$

$$x_3 = S + \beta(\lambda') R \quad (10.56)$$

$$\lambda' = \lambda'' \quad (10.57)$$

$$\Lambda' = \Lambda'' + \rho'(r, s, R, S, \lambda'). \quad (10.58)$$

Les expressions obtenues pour α et β par le procédé expliqué dans la section 4.8.3 sont :

$$\alpha = \frac{1}{2 (d_{RR} d_{sr} + d_{SR} d_{ss})} \left(-d_{rr} d_{RR} + d_{ss} d_{SS} + \sqrt{(-4 (d_{RR} d_{sr} + d_{SR} d_{ss}) \times (-d_{rr} d_{SR} - d_{sr} d_{SS})) + (d_{rr} d_{RR} - d_{ss} d_{SS})^2} \right) \quad (10.59)$$

$$\beta = \frac{d_{RR} d_{sr} + d_{SR} d_{ss}}{\sqrt{4 (d_{RR} d_{sr} + d_{SR} d_{ss}) (d_{rr} d_{SR} + d_{sr} d_{SS}) + (d_{rr} d_{RR} - d_{ss} d_{SS})^2}} \quad (10.60)$$

où les $d_{rr}, d_{sr}, d_{ss}, d_{RR}, d_{SR}, d_{SS}$ dépendent de λ' (vu leur longueur, ces expressions n’ont pu être fournies explicitement).

Afin d’utiliser à nouveau la condition nécessaire et suffisante de canonicité, nous calculons les crochets de Poisson et obtenons les expressions suivantes :

$$[x_1; \Lambda'] = \frac{\partial \rho'}{\partial s} \alpha - \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} R \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} (-S - R \beta) - \frac{\partial \rho'}{\partial r} (1 - \alpha \beta) \quad (10.61)$$

$$[x_3; \Lambda'] = -\frac{\partial \rho'}{\partial s} + \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} R - \frac{\partial \rho'}{\partial r} \beta \quad (10.62)$$

$$[\eta_1; \Lambda'] = \frac{\partial \rho'}{\partial R} - \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} s - \frac{\partial \rho'}{\partial S} \beta \quad (10.63)$$

$$[\eta_3; \Lambda'] = \frac{\partial \rho'}{\partial R} \alpha - \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} s \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} (r - s \beta) + \frac{\partial \rho'}{\partial S} (1 - \alpha \beta). \quad (10.64)$$

En annulant ces crochets et résolvant le système, nous trouvons l’expression des dérivées par-

tielles de ρ' par rapport aux nouvelles variables :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial r} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} S - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} R \beta \quad (10.65)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial s} = \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} R + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} S \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} R \beta^2 \quad (10.66)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial R} = \frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} s - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} r \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} s \beta^2 \quad (10.67)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial S} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} (r - s \beta). \quad (10.68)$$

On obtient ainsi l'expression de ρ' :

$$\rho' = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \lambda'} + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} \beta^2 \right) R s - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} r S - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} \beta r R + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda'} \beta s S. \quad (10.69)$$

Les expressions de ces coefficients faisant plusieurs centaines de lignes, nous en donnons plutôt un ordre de grandeur par l'intermédiaire des figures ci-dessous

- avec $\lambda' = e$:

dans chacune des Figures 10.5, 10.6, 10.7, nous avons fait varier e autour de sa valeur principale qui est de 0.206.

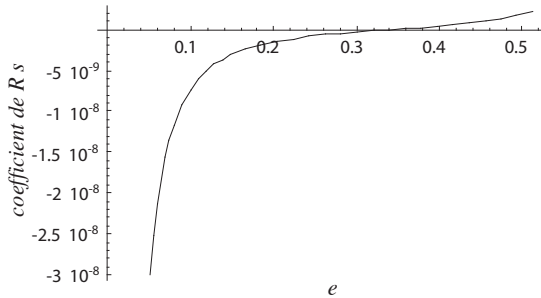


FIG. 10.5 – Valeur du coefficient (sans son signe) de $R s$ dans l'expression de ρ' pour e allant de 0 à 0.512.

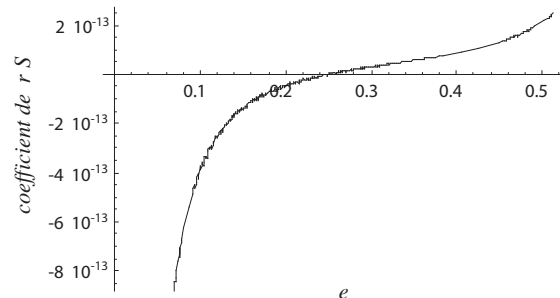


FIG. 10.6 – Valeur du coefficient (sans son signe) de $r S$ dans l'expression de ρ' pour e allant de 0 à 0.512.

On peut constater sur les graphiques que tous ces coefficients sont négligeables (l'ordre de grandeur du plus grand coefficient au voisinage de $e = 0.206$ étant de 10^{-8} et celui du plus petit de 10^{-14}).

- avec $\lambda' = \sin i_o$:

dans chacune des Figures 10.8, 10.9, 10.10, nous avons fait varier i_o autour de sa valeur principale qui est de 7° .

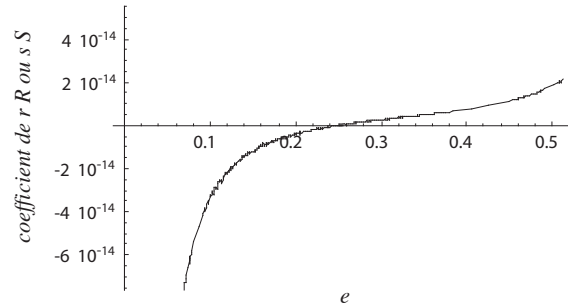


FIG. 10.7 – Valeur du coefficient (sans son signe) de rR (et de celui de sS) dans l'expression de ρ' pour e allant de 0 à 0.512.

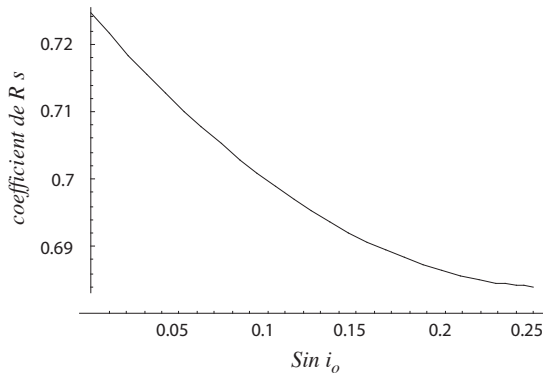


FIG. 10.8 – Valeur du coefficient (sans son signe) de Rs dans l'expression de ρ' pour $\sin i_o$ allant de 0 à 0.25 (c-à-d i_o allant de 0 à 14°).

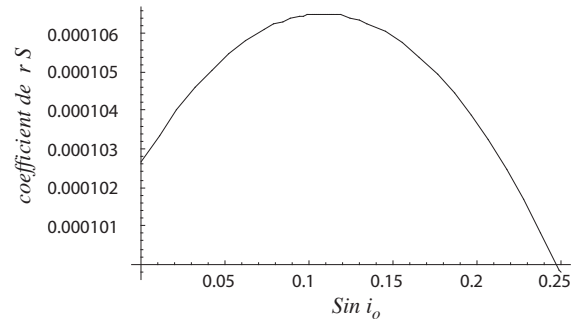


FIG. 10.9 – Valeur du coefficient (sans son signe) de rS dans l'expression de ρ' pour $\sin i_o$ allant de 0 à 0.25 (c-à-d i_o allant de 0 à 14°).

On voit donc, contrairement à l'excentricité que l'influence de i_o n'est pas négligeable (le plus grand coefficient au voisinage de $i_o = 7^\circ$ étant d'ordre 10^{-1} et le plus petit d'ordre 10^{-5}).

En résumé, comme pour la transformation précédente, l'influence de l'excentricité est négligeable tandis que celle de l'inclinaison est nettement plus importante.

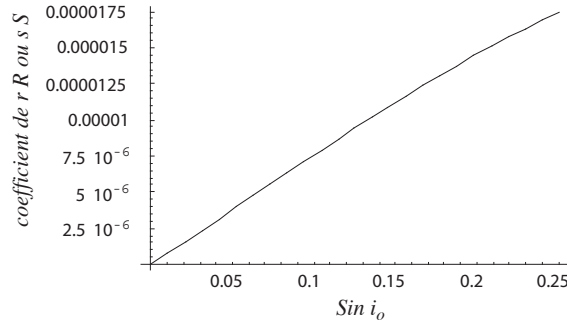


FIG. 10.10 – Valeur du coefficient (sans son signe) de $r R$ (et de celui de $s S$) dans l'expression de ρ' pour $\sin i_o$ allant de 0 à 0.25 (c-à-d i_o allant de 0 à 14°).

Notre Hamiltonien s'écrit maintenant :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{0,2}(r, s, R, S, \lambda'') + \mathcal{K}_{0,p}(r, s, R, S, \lambda'') + \dot{\lambda}'' \Lambda'' + \dot{\lambda}''(\rho + \rho') \quad (10.70)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{K}_{0,2}(r, s, R, S, \lambda'') + \mathcal{K}_{0,p}(r, s, R, S, \lambda'') \\ &\quad + \dot{\lambda}'' \Lambda'' + \dot{\lambda}'' \left((r - \beta s) \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \lambda''} + ((1 - \alpha \beta) s + \alpha r) \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \lambda''} \right) \\ &\quad + \dot{\lambda}'' \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial \lambda''} + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda''} \beta^2 \right) R s - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda''} r S - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda''} \beta r R + \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda''} \beta s S \right) \end{aligned} \quad (10.71)$$

où $\mathcal{K}_{0,2}$ ne contient que les termes d'ordre 2 non croisés et est donc de la forme :

$$\mathcal{K}_{0,2} = A R^2 + B r^2 + C S^2 + D s^2 \quad (10.72)$$

avec A, B, C et D dépendant de λ'' .

10.2.4 Changement d'échelle

La transformation suivante était un changement d'échelle (voir section 4.8.4) afin d'associer à chaque couple de variable et moment associé le même coefficient. A nouveau, nous la réécrivons avec une dépendance des coefficients en λ'' cette fois :

$$r = \alpha'(\lambda'') u \quad (10.73)$$

$$R = \frac{U}{\alpha'(\lambda'')} \quad (10.74)$$

$$s = \beta'(\lambda'') v \quad (10.75)$$

$$S = \frac{V}{\beta'(\lambda'')} \quad (10.76)$$

$$\lambda'' = \bar{\lambda} \quad (10.77)$$

$$\Lambda'' = \bar{\Lambda} + \bar{R}(u, U, v, V, \bar{\lambda}). \quad (10.78)$$

Dans ces variables, $\mathcal{K}_{0,2}$ s'écrit :

$$\mathcal{K}_{0,2} = A \frac{1}{\alpha'^2} U^2 + B \alpha'^2 u^2 + C \frac{1}{\beta'^2} V^2 + D \beta'^2 v^2. \quad (10.79)$$

Afin d'obtenir les mêmes coefficients devant u^2 et U^2 , nous devons évaluer leurs coefficients respectifs (même principe pour v^2 et V^2). On obtient ainsi les expressions de α' et de β' :

$$\alpha' = \sqrt[4]{\frac{A}{B}} \quad \text{et} \quad \beta' = \sqrt[4]{\frac{C}{D}}. \quad (10.80)$$

Ces expressions étant assez longues, nous les donnons en annexe (voir Annexe I).

Calculons, cette fois encore, les crochets de Poisson :

$$[r; \Lambda''] = \alpha' \frac{\partial \bar{R}}{\partial U} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} u \quad (10.81)$$

$$[s; \Lambda''] = \beta' \frac{\partial \bar{R}}{\partial V} + \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} v \quad (10.82)$$

$$[R; \Lambda''] = -\frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \bar{R}}{\partial u} - \frac{1}{\alpha'^2} \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} U \quad (10.83)$$

$$[S; \Lambda'] = -\frac{1}{\beta'} \frac{\partial \bar{R}}{\partial v} - \frac{1}{\beta'^2} \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} V. \quad (10.84)$$

En égalant les membres de droite à 0, on trouve les expressions des dérivées partielles de \bar{R} par rapport à chacune des nouvelles variables :

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial U} = -\frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} u \quad (10.85)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial V} = -\frac{1}{\beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} v \quad (10.86)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial u} = -\frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} U \quad (10.87)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial v} = -\frac{1}{\beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} V. \quad (10.88)$$

On voit donc aisément que l'expression de \bar{R} est donnée par :

$$\bar{R} = -\frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} u U - \frac{1}{\beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} v V. \quad (10.89)$$

Les expressions des coefficients de $u U$ et $v V$ faisant 200 pages² chacune, nous n'avons eu d'autre choix que de les représenter graphiquement :

²Ce grand nombre de termes vient du fait que les expressions de α' et β' (voir Annexe I) sont des fonctions assez complexes des coefficients $d_{rr}, d_{sr}, d_{ss}, d_{RR}, d_{SR}, d_{SS}$ qui eux-mêmes sont des fonctions assez longues de λ .

- avec $\lambda = e$,
dans chacune des deux Figures 10.11 et 10.12, nous avons fait varier e autour de sa valeur principale qui est de 0.206 :

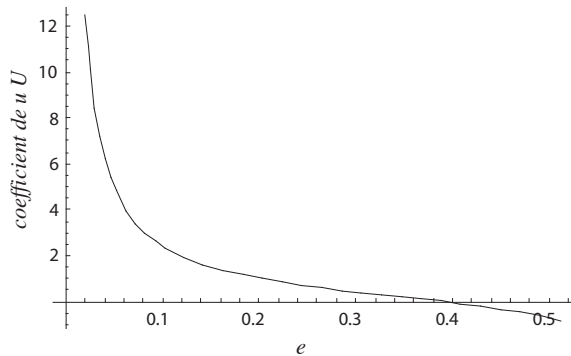


FIG. 10.11 – Valeur du coefficient de $u U$ dans l'expression de \bar{R} pour e allant de 0 à 0.512.

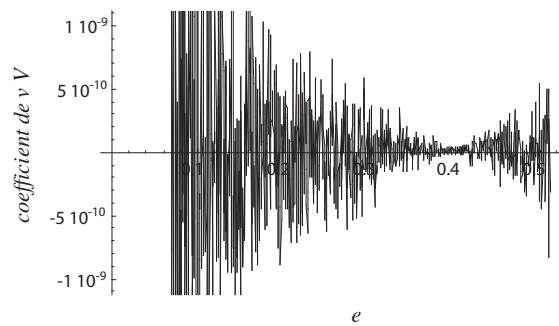


FIG. 10.12 – Valeur du coefficient de $v V$ dans l'expression de \bar{R} pour e allant de 0 à 0.512.

On peut constater sur les graphiques que le coefficient de $v V$ est négligeable (de l'ordre de 10^{-9}) tandis que celui de $u U$ (de l'ordre de l'unité) ne l'est pas, sauf pour un petit intervalle de valeurs proches de 0.4.

- avec $\lambda = \sin i_o$,
dans chacune des deux Figures 10.13 et 10.14, nous avons fait varier i_o autour de sa valeur principale qui est de 7° .

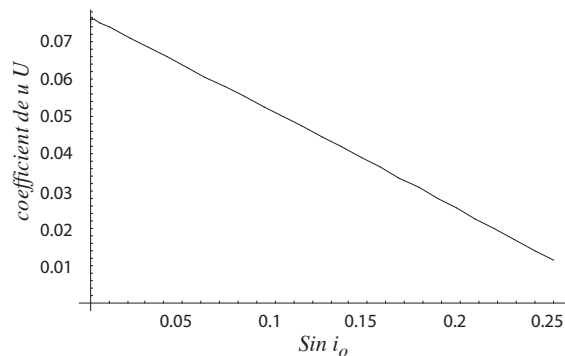


FIG. 10.13 – Valeur du coefficient de $u U$ dans l'expression de \bar{R} pour $\sin i_o$ allant de 0 à 0.25 c-à-d i_o allant de 0 à 14°

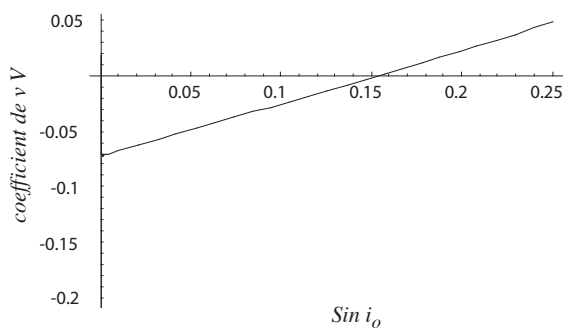


FIG. 10.14 – Valeur du coefficient de $u U$ dans l'expression de \bar{R} pour $\sin i_o$ allant de 0 à 0.25 c-à-d i_o allant de 0 à 14°

On constate donc, à nouveau, que l'influence de i_o n'est pas négligeable (de l'ordre de 10^{-2}).

Dès lors, contrairement aux transformations précédentes, l'influence de l'excentricité est loin d'être négligeable ; elle est même, pour beaucoup de valeurs de e plus importante que celle de l'inclinaison.

Dans ces variables, notre Hamiltonien prend la forme suivante :

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{0,2}(u, v, U, V, \bar{\lambda}) + \mathcal{K}_{0,p}(u, v, U, V, \bar{\lambda}) + \dot{\bar{\lambda}} \bar{\Lambda} + \dot{\bar{\lambda}}(\rho + \rho' + \bar{R}) \quad (10.90)$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{K}_{0,2}(u, v, U, V, \bar{\lambda}) + \mathcal{K}_{0,p}(u, v, U, V, \bar{\lambda}) \\ &\quad + \dot{\bar{\lambda}} \bar{\Lambda} + \dot{\bar{\lambda}}((\alpha' u - \beta \beta' v) \frac{\partial \xi_1^*}{\partial \bar{\lambda}} + ((1 - \alpha \beta) \beta' v + \alpha \alpha' u) \frac{\partial \xi_3^*}{\partial \bar{\lambda}}) \\ &\quad + \dot{\bar{\lambda}} \left(\left(\frac{\partial \beta}{\partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\lambda}} \beta^2 \right) \frac{U}{\alpha'} \beta' v - \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\lambda}} \alpha' u \frac{V}{\beta'} - \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\lambda}} \beta \alpha' u \frac{U}{\alpha'} + \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\lambda}} \beta \beta' v \frac{V}{\beta'} \right) \\ &\quad + \dot{\bar{\lambda}} \left(-\frac{1}{\alpha'} \frac{\partial \alpha'}{\partial \bar{\lambda}} u U - \frac{1}{\beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial \bar{\lambda}} v V \right) \end{aligned} \quad (10.91)$$

où $\mathcal{K}_{0,2}$ s'exprime de la façon suivante :

$$\mathcal{K}_{0,2} = \frac{A}{\alpha'^2} (u^2 + U^2) + \frac{C}{\beta'^2} (v^2 + V^2). \quad (10.92)$$

La dernière transformation de la section 4.8 était le passage aux coordonnées angle-action qui n'introduit pas de fonction "reste".

En conclusion, voici un Tableau (Tab. 10.1) récapitulatif de l'influence de l'excentricité et de l'inclinaison lorsqu'elles sont considérées comme des fonctions lentes du temps. Comme nous l'avons déjà dit au cours de cette section, on peut constater que l'influence de l'inclinaison est plus importante que celle de l'excentricité, ce qui rejoint les conclusions de Peale (2006). Pour avoir une estimation de l'ordre de grandeur de la perturbation, ces valeurs sont à multiplier par $\dot{\bar{\lambda}}$ (voir éq. (10.90)). Notons que comme λ a été définie comme une fonction lente du temps, $\dot{\bar{\lambda}}$ doit être au plus de l'ordre de $10^{-4} \frac{1}{\text{an}}$ (par comparaison avec notre plus petite fréquence propre qui vaut $5.89928 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{an}}$).

10.3 Illustration numérique

Afin d'illustrer ce chapitre par un exemple simple, nous avons considéré des formulations linéaires de nos fonctions lentes du temps e et $\sin i_o$:

$$e = e^* + \omega_e t \quad (10.93)$$

$$\sin i_o = \sin i_o^* + \omega_{i_o} t \quad (10.94)$$

Transformation	Ordre du plus grand coefficient dans la fonction “reste” pour $\lambda = e$	Ordre du plus grand coefficient dans la fonction “reste” pour $\lambda = \sin i_o$
Translation	$O(10^{-11})$	$O(1)$
Untangling	$O(10^{-8})$	$O(10^{-1})$
Echelle	$O(1)$	$O(10^{-2})$

TAB. 10.1 – Tableau récapitulatif des différents ordres de grandeur des coefficients des fonctions “reste” obtenues lorsque l’on considère e et $\sin i_o$ comme des fonctions lentes du temps.

avec e^* et $\sin i_o^*$ les valeurs initiales et ω_e et ω_{i_o} de petits coefficients (dans notre simulation leurs valeurs respectives³ sont $-0.25 \cdot 10^{-6}$ et $-0.23 \cdot 10^{-6}$).

Nous avons également choisi de ne garder, dans l’expression de notre Hamiltonien (10.90) exprimé en coordonnées angle-action, que les fonctions “reste” les plus influentes de la section précédente, à savoir les fonctions ρ et ρ' lorsque $\lambda = \sin i_o$ et la fonction \bar{R} lorsque $\lambda = e$ (voir Tableau 10.1). Nous avons ensuite développé l’Hamiltonien ainsi obtenu en série de Mac Laurin du 1er ordre en ω_e et ω_{i_o} . Son expression est donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & 0.396234 J_1 + 0.00589928 J_3 - 0.0640788 \omega_e t \\
& + 0.764023 J_1 \omega_e t + 0.00671336 J_3 \omega_e t + 0.0358966 J_1 \omega_{i_o} t \cos^2 \psi_1 \\
& - 0.0306576 \sqrt{J_3} \omega_{i_o} t \cos \psi_3 - 0.000362505 J_3 \omega_{i_o} t \cos^2 \psi_3 \\
& + 0.0358966 J_1 \omega_{i_o} t \sin^2 \psi_1 + 0.964106 J_1 \omega_e \sin 2\psi_1 \\
& + 5.19683 \sqrt{J_3} \omega_{i_o} \sin \psi_3 + 0.0992028 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \omega_{i_o} \cos \psi_1 \sin \psi_3 \\
& - 0.000362505 J_3 \omega_{i_o} t \sin^2 \psi_3.
\end{aligned} \tag{10.95}$$

Pour calculer les équilibres de ce modèle et intégrer les équations du mouvement, nous avons préféré passer en coordonnées cartésiennes afin d’éviter les singularités. Soient donc

$$x_1 = \sqrt{2J_1} \sin \psi_1 \tag{10.96}$$

$$y_1 = \sqrt{2J_1} \cos \psi_1 \tag{10.97}$$

$$x_3 = \sqrt{2J_3} \sin \psi_3 \tag{10.98}$$

$$y_3 = \sqrt{2J_3} \cos \psi_3. \tag{10.99}$$

³Ces valeurs approximatives sont tirées de la Figure 10.1.

Dans ces coordonnées, l'Hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} = & 0.198117 x_1^2 + 0.00294964 x_3^2 + 0.198117 y_1^2 + 0.00294964 y_3^2 \\
& -0.0640788 \omega_e t + 0.382011 \omega_e t x_1^2 + 0.00335668 \omega_e t x_3^2 \\
& +0.964106 \omega_e x_1 y_1 + 0.382011 \omega_e t y_1^2 + 0.00335668 \omega_e t y_3^2 \\
& +0.0179483 \omega_{i_o} t x_1^2 + 3.67472 \omega_{i_o} x_3 - 0.000362505 \omega_{i_o} t x_3^2 \\
& +0.0496014 \omega_{i_o} x_3 y_1 + 0.0179483 \omega_{i_o} t y_1^2 - 0.0216782 \omega_{i_o} t y_3 \\
& -0.000181253 \omega_{i_o} t y_3^2
\end{aligned} \tag{10.100}$$

et les équations du mouvement sont données par

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 = & 0.396234 y_1 + 0.964106 \omega_e x_1 + 0.764023 \omega_e t y_1 \\
& +0.0496014 \omega_{i_o} x_3 + 0.0358966 \omega_{i_o} t y_1
\end{aligned} \tag{10.101}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_3 = & 0.00589928 y_3 + 0.00671336 \omega_e t y_3 - 0.0216782 \omega_{i_o} t \\
& -0.000362505 \omega_{i_o} t y_3
\end{aligned} \tag{10.102}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 = & -(0.396234 x_1 + 0.764023 \omega_e t x_1 + 0.964106 \omega_e y_1 \\
& + 0.0358966 \omega_{i_o} t x_1)
\end{aligned} \tag{10.103}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_3 = & -(0.00589928 x_3 + 0.00671336 \omega_e t x_3 + 3.67472 \omega_{i_o} \\
& -0.00072501 \omega_{i_o} t x_3 + 0.0496014 \omega_{i_o} y_1) .
\end{aligned} \tag{10.104}$$

En annulant ces équations et en résolvant le système ainsi obtenu, nous trouvons les expressions (dépendant du temps) des valeurs d'équilibre pour x_1, x_3, y_1 et y_3 . L'évolution de ces valeurs d'équilibre en fonction du temps est représentée sur les Figures 10.15, 10.16, 10.17 et 10.18 pour une durée de 500000 ans. Notons que les ordres de grandeurs sont très différents, ce qui ne sera pas facile à gérer dans l'intégration numérique des équations du mouvement.

Une des utilités de ce modèle adiabatique étant de montrer que l'axe du moment angulaire suit son état de Cassini lorsque les éléments orbitaux varient lentement avec le temps, nous présentons ici, comme Peale (2006), les mouvements obtenus par intégration numérique, pour le degré de liberté (x_3, y_3) . On peut effectivement voir sur les Figures 10.19 et 10.21 que le mouvement suit parfaitement la trajectoire de l'équilibre (les valeurs initiales prises pour x_3 et y_3 sont respectivement 0 et $\sqrt{2} 10^{-2}$) tout en effectuant une oscillation autour de celui-ci avec une période de 1065 ans (Figures 10.20 et 10.22).

Par ailleurs, on voit très bien sur la Figure 10.23 (et mieux encore sur son zoom (Figure 10.24)) que, dans le plan de phase (y_3, x_3) , l'aire est conservée, ce qui est caractéristique d'un modèle adiabatique.

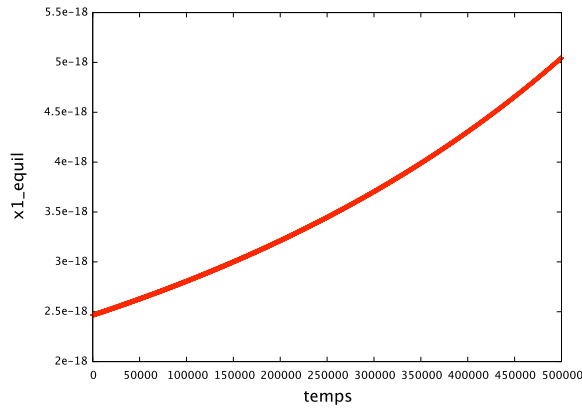


FIG. 10.15 – Evolution de la valeur d'équilibre de x_1 en fonction du temps exprimé en années.

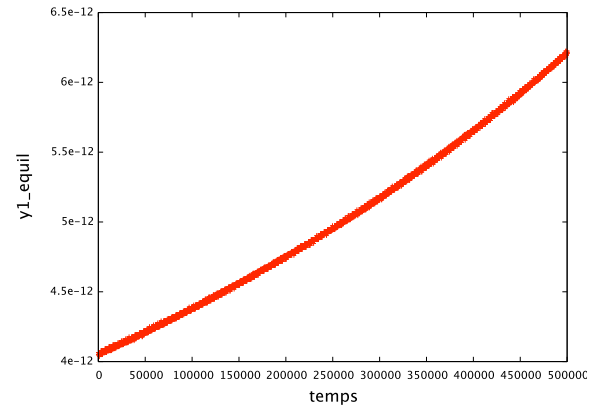


FIG. 10.16 – Evolution de la valeur d'équilibre de y_1 en fonction du temps exprimé en années.

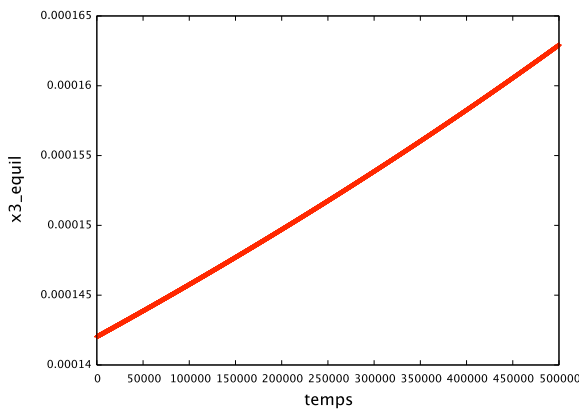


FIG. 10.17 – Evolution de la valeur d'équilibre de x_3 en fonction du temps exprimé en années.

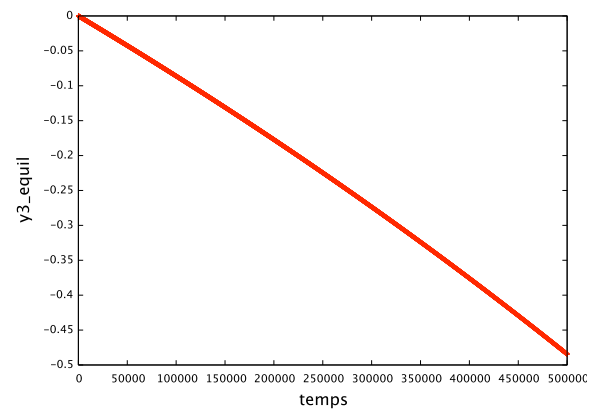


FIG. 10.18 – Evolution de la valeur d'équilibre de y_3 en fonction du temps exprimé en années.

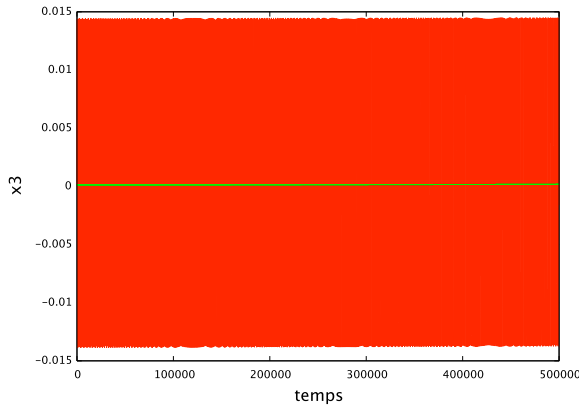


FIG. 10.19 – La courbe rouge représente le mouvement de x_3 (à partir de la condition initiale $x_3 = 0$) tandis que la courbe verte représente l'évolution de la valeur d'équilibre de x_3 avec le temps.

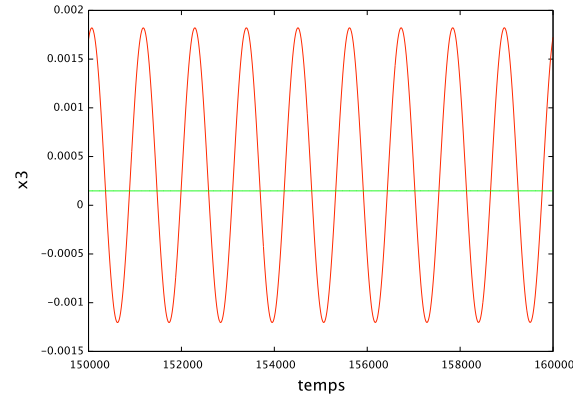


FIG. 10.20 – Zoom sur le mouvement de x_3 en fonction du temps sur l'intervalle $[150000, 160000]$ ans.

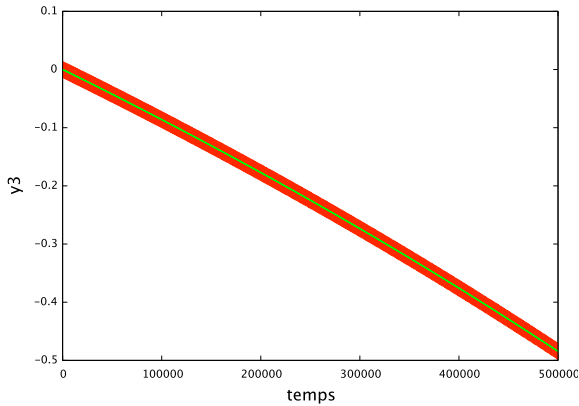


FIG. 10.21 – La courbe rouge représente le mouvement de y_3 (à partir de la condition initiale $y_3 = \sqrt{2} 10^{-2}$) tandis que la courbe verte représente l'évolution de la valeur d'équilibre de y_3 avec le temps.

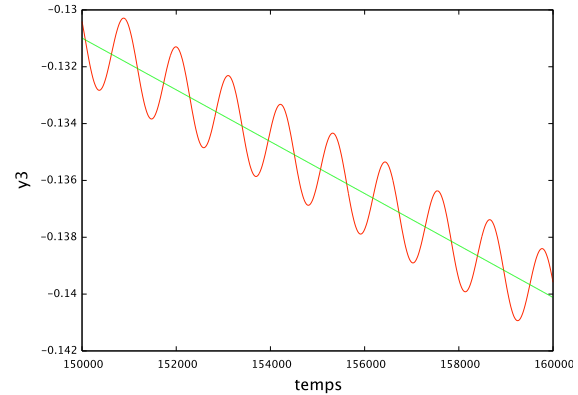


FIG. 10.22 – Zoom sur le mouvement de y_3 en fonction du temps sur l'intervalle $[150000, 160000]$ ans.

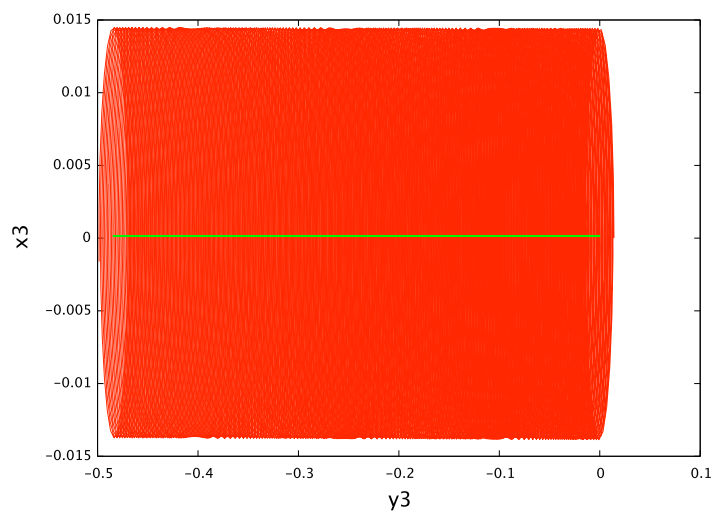


FIG. 10.23 – La courbe rouge décrit des orbites elliptiques autour de la courbe illustrant l'évolution des valeurs d'équilibre du couples (y_3, x_3) .

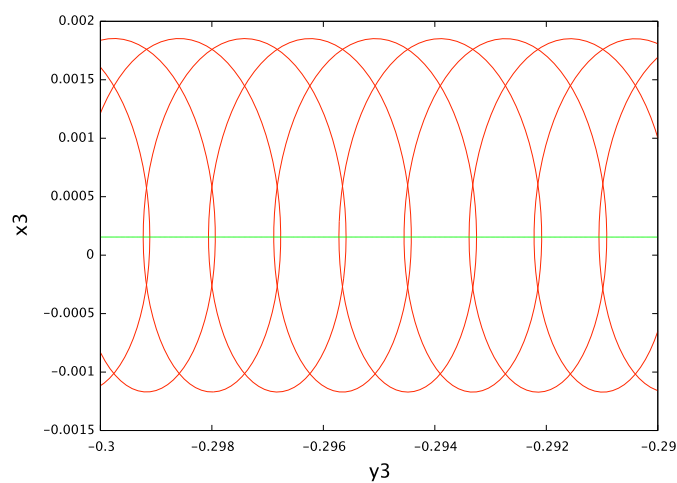


FIG. 10.24 – Zoom de la Figure 10.23 pour $y_3 \in [-0.3, -0.29]$. L'aire des orbites est clairement conservée.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le but de ce travail a été de construire un modèle analytique de base de la rotation de Mercure. Dans ce modèle, Mercure est considéré comme rigide, la normale à l'orbite, l'axe du moment angulaire et l'axe principal de plus petite inertie sont dissociés, l'orbite est képlérienne (sauf dans le dernier chapitre) et aucune force dissipative n'est prise en compte. Nous avons travaillé en formalisme hamiltonien, à 3 degrés de liberté (à 2 degrés de liberté dans certains chapitres). La résonance spin-orbite 3 : 2, caractéristique de Mercure, a été la pierre d'angle de notre modèle. Notre théorie est à moyen terme (les périodes propres comprises entre 10 et 1000 ans), les courtes périodes ayant été moyennisées ; nous rajoutons toutefois de très longues périodes ($> 10^5$ ans) dans le dernier chapitre en introduisant les effets dus aux autres planètes du Système Solaire. Ces effets séculaires se traduisent de manière adiabatique par un lent déplacement de l'équilibre avec confinement du mouvement autour de celui-ci. Notre modèle est tronqué à l'ordre 2 en excentricité, nous avons montré que ce choix était pertinent en étudiant l'importance des troisième et quatrième ordres. Il est de plus limité à l'ordre 2 en harmoniques sphériques, la raison en est que les harmoniques d'ordre plus élevés sont encore fort méconnus.

Le modèle ainsi obtenu est très performant, malgré les quelques hypothèses simplificatrices que nous avons posées : il permet, en effet, de retrouver avec une très bonne approximation les résultats obtenus par le modèle numérique SONYR (Rambaux & Bois, 2004) couvrant pourtant un plus grand nombre d'effets dissipatifs.

Par conséquent, notre modèle peut servir de base à des modèles plus complets incluant les effets dissipatifs (marée et friction noyau-manteau), l'effet relativiste de la précession du péricentre (assez simple à ajouter, du moins en première approximation, puisqu'il suffirait d'ajuster la valeur de μ_2), les courtes périodes et la non rigidité de Mercure, tous ces effets pouvant être greffés comme des perturbations.

Notre modèle a d'ailleurs déjà fait ses preuves dans deux domaines d'applications : dans le cadre de la mission BepiColombo, Dufey et al (2006) se sont basés sur notre modèle et y ont inclus les courtes périodes (périodes de rotation et de révolution). Dans un autre contexte, (à

savoir, la détermination de la taille du noyau de Mercure), Yseboodt & Margot (2005), toujours à partir de notre modèle, ont montré que si l'on introduit les planètes de façon adiabatique, en supposant, au départ, leurs masses nulles et en les faisant augmenter lentement avec le temps, l'axe du moment angulaire reste dans une position proche d'un état de Cassini instantané sans avoir recours à des processus dissipatifs plus compliqués (en ajoutant simplement un potentiel planétaire séculaire à notre Hamiltonien de départ).

De plus, l'avantage d'un modèle analytique étant de permettre l'étude d'un problème à partir de n'importe quelles données numériques, notre modèle peut également s'avérer très utile pour l'analyse de missions. Par exemple, toutes les valeurs numériques obtenues dans ce travail l'ont été pour des valeurs traditionnelles tirées de la littérature (Anderson et al. (1987), Nasa). Toutefois Margot (2007) vient de mesurer, par des observations radar, une période de libration de 12 ans qui ne coïncide donc pas avec notre valeur de 15.86 ans. Ceci provient du fait que nous avons considéré Mercure comme un corps rigide, négligeant ainsi l'effet du noyau liquide (Rambaux et al., 2007a). En ajoutant cet effet à notre modèle, nous pourrions certainement retrouver cette nouvelle période de libration. En outre, grâce à l'ajustement des coefficients C_0^2 et C_2^2 par les missions MESSENGER et BepiColombo, une valeur encore plus précise de cette période pourra aisément être obtenue. Un autre avantage de notre modèle analytique est qu'il se prête parfaitement à l'analyse d'équations aux variations par rapport à l'un ou l'autre paramètre, permettant ainsi de corriger les orbites. Notre équipe de recherche est déjà impliquée, sur base de ce travail de pionnier sur la rotation de Mercure, dans le projet MORE de la mission BepiColombo de l'ESA. Elle est officiellement en charge du module "Rotation" dans ce projet, étant la seule à avoir formalisé et calculé ce mouvement résonant.

Avec l'ajout de courtes périodes et l'introduction de théories orbitales perturbatrices plus complètes, ce modèle, encore au stade qualitatif, devrait fournir les données quantitatives nécessaires d'une part à la mission BepiColombo et d'autre part aux spécialistes de la structure interne des planètes telluriques.

ANNEXES

CALCUL DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE DE ROTATION D'UN CORPS HOMOGÈNE RIGIDE

A.1 Energie cinétique de rotation

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur instantané de rotation et I la matrice d'inertie de ce corps, l'énergie cinétique T peut être écrite de la façon suivante :

$$T = \frac{1}{2}(\vec{\omega} I \vec{\omega}) \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{\omega} | \vec{L}) \quad (\text{A.2})$$

où \vec{L} est le moment angulaire.

Dans le repère $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$ (voir Figure 2.1),

$$\vec{L} = (\Lambda_1 \sin J \sin(-\lambda_2), \Lambda_1 \sin J \cos(-\lambda_2), \Lambda_1 \cos J) \quad (\text{A.3})$$

or $\vec{L} = I \vec{\omega}$ avec $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ où I_1, I_2 et I_3 sont les moments principaux d'inertie ($I_1 < I_2 < I_3$).

Dès lors, l'axe instantané de rotation $\vec{\omega}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\vec{\omega} = \left(\frac{\Lambda_1}{I_1} \sin J \sin(-\lambda_2), \frac{\Lambda_1}{I_2} \sin J \cos(-\lambda_2), \frac{\Lambda_1}{I_3} \cos J \right) \quad (\text{A.4})$$

Notons ici que l'axe du moment angulaire et l'axe instantané de rotation ne sont en principe pas confondus si ce n'est dans le cas $J = 0$. Une expression de l'inclinaison et de la longitude du nœud du plan normal à l'axe instantané de rotation sur le plan de l'écliptique est fournie par Kinoshita (1977).

$$\Rightarrow T = \frac{\Lambda_1^2}{2} \left(\sin^2 J \left(\frac{\sin^2(-\lambda_2)}{I_1} + \frac{\cos^2(-\lambda_2)}{I_2} \right) + \frac{1}{I_3} \cos^2 J \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{2} \left((\Lambda_1^2 - \Lambda_1^2 \cos^2 J) \left(\frac{\sin^2 \lambda_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_2}{I_2} \right) + \frac{1}{I_3} \Lambda_1^2 \cos^2 J \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{2} \left((\Lambda_1^2 - (\Lambda_1 - \Lambda_2)^2) \left(\frac{\sin^2 \lambda_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_2}{I_2} \right) + \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{I_3} \right). \quad (\text{A.7})$$

A.2 Quelques précisions au sujet des axes principaux d'inertie

On peut montrer qu'en l'absence de force extérieure, l'énergie cinétique de rotation est constante. Dès lors, si l'on réécrit l'équation (A.1) de la façon suivante :

$$I_1 \omega_x^2 + I_2 \omega_y^2 + I_3 \omega_z^2 = 2T, \quad (\text{A.8})$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\omega_x^2}{1/I_1} + \frac{\omega_y^2}{1/I_2} + \frac{\omega_z^2}{1/I_3} = 2T, \quad (\text{A.9})$$

on obtient l'équation d'un ellipsoïde dont le plus grand axe est le long de \vec{X}_3 et le plus petit le long de \vec{Z}_3 . \vec{X}_3 , l'axe principal de plus petite inertie est donc le plus grand axe inertie et inversement, \vec{Z}_3 , l'axe de plus grande inertie est le plus petit axe d'inertie.

ANNEXE B

CALCUL DU POTENTIEL DU CHAMP DU GRAVITÉ

Si l'on considère le problème à deux corps suivant :

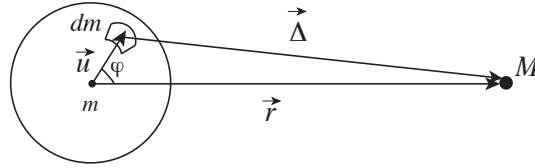


FIG. B.1 – Le corps de gauche représente Mercure (masse m) tandis que celui de droite figure le Soleil (masse M) considéré comme une masse ponctuelle et donc réduit à son centre de masse.

où

- dm est un élément de masse,
- \vec{r} est le vecteur joignant le centre de masse de Mercure avec celui du Soleil,
- \vec{u} est le vecteur position de l'élément de masse par rapport au centre de masse de Mercure,
- $\vec{\Delta}$ est le vecteur joignant l'élément de masse au centre de masse du Soleil,
- φ est la longitude de l'élément de masse dm .

La définition du potentiel est donnée par :

$$V_G = -\mathcal{G}M \int_m \frac{1}{\Delta} dm \quad (\text{B.1})$$

où G est la constante de gravitation. Or

$$\Delta^2 = (\vec{\Delta} | \vec{\Delta}) = ((\vec{r} - \vec{u}) | (\vec{r} - \vec{u})) \quad (\text{B.2})$$

$$= r^2 - 2(\vec{r} | \vec{u}) + u^2 \quad (\text{B.3})$$

$$= r^2 - 2 r u \cos \varphi + u^2. \quad (\text{B.4})$$

Dès lors,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2u}{r} \cos \varphi + \frac{u^2}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (\text{B.5})$$

Toutefois, étant donné que u est très petit par rapport à r , nous pouvons utiliser son développement en série bien connu autour de $u = 0$:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} \right)^n P_n(\cos \varphi) \quad (\text{B.6})$$

où les P_n sont les polynômes de Legendre.

En intégrant, nous trouvons

$$V_G = \frac{-\mathcal{G}M}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \int_m \left(\frac{u}{r} \right)^n P_n(\cos \varphi) dm. \quad (\text{B.7})$$

De plus, les P_n peuvent être exprimés de la façon suivante (Peale, 1974 et Kaula, 1966) :

$$P_n(\cos \varphi) = \sum_{m=0}^n \frac{(2n-2m)!}{(n+m)!} P_n^m(\sin \eta_s) P_n^m(\sin \eta_m) \times (\cos n\lambda_s \cos m\lambda_m + \sin n\lambda_s \sin m\lambda_m) \quad (\text{B.8})$$

avec η_s et λ_s la latitude et la longitude du Soleil dans le repère $(\vec{X}_3, \vec{Y}_3, \vec{Z}_3)$, η_m et λ_m la latitude et la longitude de \vec{u} et P_n^m les polynômes de Legendre associés :

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z).$$

V_G peut donc être écrit de la façon suivante :

$$V_G = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{G}M}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\sin \eta_s) \{C_n^m \cos m\lambda_s + S_n^m \sin m\lambda_s\} \quad (\text{B.9})$$

avec

$$C_n^m = \frac{(2n-2m)!}{(m+n)!} \int_{m'} u^n P_n^m(\sin \eta_{m'}) \cos m\lambda_{m'} dm' \quad (\text{B.10})$$

$$S_n^m = \frac{(2n-2m)!}{(m+n)!} \int_{m'} u^n P_n^m(\sin \eta_{m'}) \sin m\lambda_{m'} dm' \quad (\text{B.11})$$

où nous avons renommé (dans cette expression uniquement) la masse de Mercure, sa longitude et sa latitude, m' , $\eta_{m'}$ et $\lambda_{m'}$ pour éviter toute confusion.

On peut montrer que $C_0^0 = m'$ et que C_1^0, S_1^0, C_1^1 et S_1^1 sont nuls si nous choisissons le centre de gravité de Mercure comme origine. De plus, le fait de prendre les axes principaux d'inertie comme axes du repère permet l'annulation de tous les C_2^m et S_2^m ($m = 0, 1, 2$) excepté C_2^0 et C_2^2 :

$$C_2^0 = \frac{I_1 + I_2 - 2I_3}{2} \quad (\text{B.12})$$

$$C_2^2 = \frac{I_2 - I_1}{4}. \quad (\text{B.13})$$

Sous ces conditions, le potentiel limité à l'ordre 2 est donné par

$$V_G = -\frac{\mathcal{G}MmR_e^2}{r^3}(\tilde{C}_2^0 P_2(\sin \eta_s) + \tilde{C}_2^2 P_2^2(\sin \eta_s) \cos 2\lambda_s). \quad (\text{B.14})$$

où R_e est le rayon équatorial de Mercure et \tilde{C}_2^0 et \tilde{C}_2^2 sont des grandeurs sans dimension¹ :

$$\tilde{C}_2^0 = \frac{C_2^0}{mR_e^2} \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{C}_2^2 = \frac{C_2^2}{mR_e^2}. \quad (\text{B.16})$$

¹Notons que dans tout le manuscrit (hors cette annexe), nous avons utilisé, par souci de légèreté du texte, les notations sans “~” pour désigner les grandeurs sans dimension.

**DEUX DES QUATRE ÉQUATIONS DU
MOUVEMENT DU MODÈLE SIMPLIFIÉ À 2
DEGRÉS DE LIBERTÉ**

$$\begin{aligned}
-\frac{dH}{d\sigma_1} = & \frac{1}{(\Delta 0 - \frac{3\Delta 1}{2})^6} \\
& \left(3 \text{ C22 } \alpha \left(-\frac{1}{384} (168e - 369e^3) \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0] \sin[2\sigma_1] - \right. \right. \\
& \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[K] \sin[2\sigma_1] - \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \\
& \cos[i0]^2 \cos[K] \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1] - \\
& \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \\
& \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1] - \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] + \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] + \\
& \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] - \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \\
& \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] - \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \sin[i0]^2 \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] + \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[K]^2 \sin[i0]^2 \sin[2\sigma_1 + 2\sigma_3] - \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \sin[i0] \\
& \sin[K] \sin[2\sigma_1 + 3\sigma_3] + \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + 3\sigma_3] + \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + 3\sigma_3] - \\
& \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2\sigma_1 + 3\sigma_3] - \\
& \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] + \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0] \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] - \\
& \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] + \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[K] \\
& \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] - \frac{1}{96} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] + \\
& \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] - \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \\
& \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] + \frac{1}{192} (168e - 369e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] - \\
& \left. \left. \frac{1}{384} (168e - 369e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \sin[2\sigma_1 + 4\sigma_3] \right) \right)
\end{aligned}$$

FIG. C.1 – Dérivée de l'Hamiltonien simplifié par rapport à σ_1 .

$$\begin{aligned}
-\frac{dH}{d\sigma_3} = & \frac{1}{\left(\Lambda_0 - \frac{3\Lambda_1}{2}\right)^6} \\
& \left(\alpha \left(\frac{1}{2} C20 \left(\frac{3}{8} (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[\sigma_3] + \frac{3}{16} (8 + 12 e^2) \sin[2 \sigma_3] - \right. \right. \right. \\
& \quad \frac{3}{16} (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \sin[2 \sigma_3] - \frac{3}{16} (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_3] + \\
& \quad \left. \left. \frac{3}{16} (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_3] \right) + \right. \\
& 3 C22 \left(-\frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + \sigma_3] - \right. \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + \sigma_3] - \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + \sigma_3] - \frac{1}{192} \\
& \quad (168 e - 369 e^3) \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] + \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] + \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] - \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \\
& \quad \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] - \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \sin[i0]^2 \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] + \\
& \quad \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \sin[i0]^2 \sin[2 \sigma_1 + 2 \sigma_3] - \frac{1}{64} (168 e - 369 e^3) \\
& \quad \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] + \frac{1}{64} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \sin[i0] \sin[K] \\
& \quad \sin[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] + \frac{1}{64} (168 e - 369 e^3) \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] - \\
& \quad \frac{1}{64} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[i0] \sin[K] \sin[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] - \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] + \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] - \\
& \quad \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] + \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \cos[K] \\
& \quad \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] - \frac{1}{48} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] + \\
& \quad \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] - \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \\
& \quad \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] + \frac{1}{96} (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] - \\
& \quad \left. \left. \left. \frac{1}{192} (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \sin[2 \sigma_1 + 4 \sigma_3] \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

FIG. C.2 – Dérivée de l'Hamiltonien simplifié par rapport à σ_3 .

ANNEXE **D**

MODÈLE À 3 DEGRÉS DE LIBERTÉ

$$\begin{aligned}
\langle \text{VG} \rangle = & \frac{1}{(\Lambda 0 - \frac{3\Lambda 1}{2})^6} \\
& \left(G m^7 M \text{Re}^2 \mu^3 \left(\frac{1}{128} C20 (8 + 12 e^2) + \frac{1}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 - \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \right. \right. \\
& \text{Cos}[J]^2 - \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 - \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[K]^2 - \\
& \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[K]^2 + \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K]^2 + \\
& \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K]^2 + \frac{3}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[2 \lambda 2] + \\
& \frac{3}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] - \frac{3}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] - \\
& \frac{3}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] - \frac{9}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] - \\
& \frac{9}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] + \frac{9}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[J]^2 \\
& \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] + \frac{9}{64} C22 (8 + 12 e^2) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \lambda 2] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[J] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \text{Cos}[J] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \\
& \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \\
& \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[J] \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \\
& \text{Cos}[J] \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J] \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[J]^2 \text{Cos}[K] \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \\
& \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1] - \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0]^2 \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[J] \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \text{Cos}[i0] \text{Cos}[J] \text{Cos}[K]^2 \text{Cos}[2 \sigma 1] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1]) + \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} + \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} + \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{1}{1024} (C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1]) - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \\
& \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1]) - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] + \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] - \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \\
& \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] + \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 - 2\sigma 3] - \\
& \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[2\sigma 3] + \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[2\sigma 3] - \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[2\sigma 3] + \\
& \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \cos[2\sigma 3] - \frac{3}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] + \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] - \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] + \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{9}{128} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \\
& \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \\
& \cos[J]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[4\lambda 2 + 2\sigma 1 + 2\sigma 3] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} - \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \\
& \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) + \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} - \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} - \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} - \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{1024} (C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) - \\
& \frac{1}{1024} (C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) + \\
& \frac{1}{512} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \\
& \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]}{1024} + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) + \\
& \frac{1}{512} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3] - \\
& \frac{1}{1024} (C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0]^2 \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 4 \sigma 3]) - \\
& \frac{1}{64} C20 (8 + 12 e^2) \sin[i0]^2 + \frac{3}{64} C20 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \sin[i0]^2 + \\
& \frac{3}{64} C20 (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \sin[i0]^2 - \frac{9}{64} C20 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \sin[i0]^2 - \\
& \frac{3}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[2 \lambda 2] \sin[i0]^2 + \frac{3}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2] \sin[i0]^2 - \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[J]^2 \\
& \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2] \sin[i0]^2 - \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 2 \sigma 3] \sin[i0]^2 - \\
& \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \lambda 2 - \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 - \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{3}{32} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[K] \cos[\sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{9}{32} C20 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[\sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{9}{32} C22 (8 + 12 e^2) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda_2 + 2 \sigma_1 + \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \sigma_1 + 3 \sigma_3] \sin[i0] \sin[K] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C20 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[2 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{128} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J] \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] + \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] - \\
& \frac{1}{256} C22 (168 e - 369 e^3) \cos[i0] \cos[J]^2 \cos[K] \cos[4 \lambda 2 + 2 \sigma 1 + 3 \sigma 3] \sin[i0] \sin[K] \Big) \Big) \Big)
\end{aligned}$$

FIG. D.1 – Expression du potentiel moyennisé à 3 degrés de liberté.

MODÈLE DE PURE ROTATION LIBRE (DEPRIT, 1967) – VALEUR D'ÉQUILIBRE DE L'ANGLE J

L'Hamiltonien du modèle de pure rotation libre de Deprit (1967) n'est constitué que de deux termes et s'écrit :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 \lambda_2}{I_1} + \frac{\cos^2 \lambda_2}{I_2} \right) (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) + \frac{1}{2} \frac{\Lambda_2^2}{I_3}. \quad (\text{E.1})$$

Les équilibres de ce modèle (E.1) sont les solutions du système obtenu en annulant les membres de droite des équations suivantes :

$$\dot{\lambda}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_{\mathcal{D}}}{\partial \Lambda_2} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{\sin^2 \lambda_2}{I_1} - \frac{\cos^2 \lambda_2}{I_2} \right) \Lambda_2 \quad (\text{E.2})$$

$$\dot{\Lambda}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\mathcal{D}}}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2) \sin 2\lambda_2. \quad (\text{E.3})$$

Deprit trouve ainsi comme équilibres :

$$(\lambda_2, \Lambda_2) = (0, 0) \quad \text{et} \quad (\lambda_2, \Lambda_2) = \left(\frac{\pi}{2}, 0 \right). \quad (\text{E.4})$$

Le premier équilibre correspond à une rotation autour de l'axe d'inertie moyenne, l'énergie vaut alors $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \frac{\Lambda_1^2}{2I_2}$. Le second correspond à une rotation autour de l'axe de plus petite inertie, l'énergie est alors maximale et vaut $\mathcal{H}_{\mathcal{D}} = \frac{\Lambda_1^2}{2I_1}$; on montre que le corps est dans ce cas en libration.

**EXPRESSIONS RELATIVES À
L'HAMILTONIEN DÉVELOPPÉ AU
TROISIÈME ORDRE AUTOUR DE
L'ÉQUILIBRE DU MODÈLE DE BASE**

$$\begin{aligned}
H_{o3} = & \frac{6.651492574235807 \cdot \eta^2}{I1} + \frac{2.579048773140168 \cdot x1 \cdot \eta^2}{I1} + \frac{88.48470693022816}{I3} + \\
& \frac{68.6180950525352 \cdot x1}{I3} + \frac{19.954477722707423 \cdot x1^2}{I3} + \frac{2.5790487731401686 \cdot x1^3}{I3} + \\
& \frac{6.651492574235807 \cdot \eta^2}{I3} + \frac{2.579048773140168 \cdot x1 \cdot \eta^2}{I3} - \frac{6.651492574235807 \cdot \eta^2}{I3} - \\
& \frac{2.579048773140168 \cdot x1 \cdot \eta^2}{I3} + \frac{13794.337230976751 \cdot C20 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^9} - \\
& \frac{50873.87604650496 \cdot C22 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^9} + \frac{668.5767915015622 \cdot C20 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} - \\
& \frac{2465.7286717654115 \cdot C22 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} + \frac{129.6169344419812 \cdot C20 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} - \\
& \frac{478.03064010364153 \cdot C22 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} + \frac{129.61693444198116 \cdot C20 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} - \\
& \frac{478.0306401036415 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^8} + \frac{24.688939893710696 \cdot C20 \cdot x1 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \\
& \frac{91.05345525783646 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{2.393221500000001 \cdot C20 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \\
& \frac{8.826263408249998 \cdot C22 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \frac{0.020827960947081177 \cdot C20 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \\
& \frac{0.025604688015113033 \cdot C22 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{0.4824879525761828 \cdot C20 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \\
& \frac{0.5931427242518954 \cdot C22 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \frac{2.794256060070302 \cdot C20 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \\
& \frac{3.435096447233615 \cdot C22 \cdot x1 \cdot x3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{2.3932215 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \\
& \frac{8.826263408249996 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{6.844588206452117 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \\
& \frac{4.494989131209789 \cdot C20 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{8.989978262419578 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^2}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \\
& \frac{1.1686993453584145 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^3}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} - \frac{2.7734669112388506 \cdot C20 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^3}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \\
& \frac{3.460557995152426 \cdot C22 \cdot x1 \cdot \alpha \cdot \eta^3}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^7} + \frac{0.5318270000000002 \cdot C20 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \\
& \frac{1.9613918684999996 \cdot C22 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \frac{0.00044865725439370205 \cdot C20 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} + \\
& \frac{0.0005515532247086258 \cdot C22 \cdot x1^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} + \frac{0.00017428768406111694 \cdot C20 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \\
& \frac{0.0002142591771993347 \cdot C22 \cdot x1^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} + \frac{0.010393322737202693 \cdot C20 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \\
& \frac{0.01277694858380985 \cdot C22 \cdot x1 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \frac{0.004041211964387042 \cdot C20 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} + \\
& \frac{0.004968031763357667 \cdot C22 \cdot x1^2 \cdot x3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} - \frac{0.060191357913977096 \cdot C20 \cdot x3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 + \Lambda 0)^6} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{0.07399576677280884 \cdot C22 \cdot x_3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{0.023469548253680524 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot x_3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.028852102345397625 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot x_3^2 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.000505622599821595 \cdot C20 \cdot x_3^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.000621583118708347 \cdot C22 \cdot x_3^3 \cdot \alpha}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{0.14743998032090905 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \eta_1^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.00008698114961343527 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_1^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.057061427159197244 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_1^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.0010074763654574189 \cdot C20 \cdot x_3 \cdot \alpha \cdot \eta_1^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.00123853305110756 \cdot C22 \cdot x_3 \cdot \alpha \cdot \eta_1^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.0968270243670075 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \eta_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{0.193654048734015 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \eta_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.03754369648818777 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.07508739297637554 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.025175073106410015 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \eta_1 \cdot \eta_3}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.00970640030352769 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_1 \cdot \eta_3}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.0006368041938939659 \cdot C22 \cdot x_3 \cdot \alpha \cdot \eta_1 \cdot \eta_3}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.05974353671536822 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.07454423660194341 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{0.023208440899738496 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.028957236360129 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.0005037381827286999 \cdot C20 \cdot x_3 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.000619266525553764 \cdot C22 \cdot x_3 \cdot \alpha \cdot \eta_3^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{926.3442832092248 \cdot m^3 \cdot x_1^3 \cdot \mu^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^5} - \\
& \frac{89.79514975218339 \cdot m^3 \cdot x_1^2 \cdot \mu^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^4} - \frac{17.408579218696133 \cdot m^3 \cdot x_1^3 \cdot \mu^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^4} - \\
& \frac{17.408579218696136 \cdot m^3 \cdot x_1 \cdot \eta_1^2 \cdot \mu^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^4} - \frac{7.737146319420504 \cdot m^3 \cdot x_1 \cdot \mu^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^3} - \\
& \frac{3 \cdot m^3 \cdot x_1^2 \cdot \mu^2}{4 \cdot (-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^3} - \frac{3 \cdot m^3 \cdot \eta_1^2 \cdot \mu^2}{4 \cdot (-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^3} - \\
& \frac{m^3 \cdot \mu^2}{2 \cdot (-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^2} - \frac{0.028584178371584418 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \xi_2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \\
& \frac{0.00244034480547625 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \xi_2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{6.651492574235807 \cdot \xi_2^2}{I2} + \\
& \frac{2.579048773140168 \cdot x_1 \cdot \xi_2^2}{I2} - \frac{6.651492574235807 \cdot \xi_2^2}{I3} - \frac{2.579048773140168 \cdot x_1 \cdot \xi_2^2}{I3} - \\
& \frac{1.0726950279837313 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^7} - \frac{2.1453900559674626 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^7} - \\
& \frac{0.023107034206553002 \cdot C20 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} - \frac{0.046214068413106005 \cdot C22 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \\
& \frac{0.008959518116603357 \cdot C20 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6} + \frac{0.017919036233206714 \cdot C22 \cdot x_1 \cdot \alpha \cdot \xi_2^2}{(-19.95447772270742 \cdot \Delta 0)^6}
\end{aligned}$$

FIG. F.1 – Expression de l'Hamiltonien développé au troisième ordre en η_1, η_3, x_1 et x_3 autour de l'équilibre du modèle de base.

$$\begin{aligned}
W_2 = & 72374.33623713665 \, J_1^2 \sin[2 \psi_1] + 0.0506311681459992 \, J_1 J_2 \sin[2 \psi_1] + \\
& 7.932225746806753 \, J_1 J_3 \sin[2 \psi_1] - 9046.792029642824 \, J_1^2 \sin[4 \psi_1] - \\
& 5.551861126410614 \, J_1 J_2 \sin[2 \psi_1 - 2 \psi_2] - 13.539471533936464 \, J_1 J_2 \sin[2 \psi_2] - \\
& 9.489716656500311 \, J_2^2 \sin[2 \psi_2] - 0.00048087981457305894 \, J_2 J_3 \sin[2 \psi_2] + \\
& 0.007908050732481395 \, J_2^2 \sin[4 \psi_2] + 5.616214890904807 \, J_1 J_2 \sin[2 \psi_1 + 2 \psi_2] - \\
& 0.03399791569087425 \, \sqrt{J_1} J_3^{3/2} \sin[\psi_1 - 3 \psi_3] - 4.068635858562926 \, J_1 J_3 \sin[2 \psi_1 - 2 \psi_3] + \\
& 0.00056388254382236 \, J_2 J_3 \sin[2 \psi_2 - 2 \psi_3] + 2682.9962655783515 \, J_1^{3/2} \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 - \psi_3] + \\
& 0.0012536601500683108 \, \sqrt{J_1} J_2 \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 - \psi_3] + \\
& 0.09648759767136371 \, \sqrt{J_1} J_3^{3/2} \sin[\psi_1 - \psi_3] - 295.1266686349779 \, J_1^{3/2} \\
& \sqrt{J_3} \sin[3 \psi_1 - \psi_3] - 0.06714716237302858 \, \sqrt{J_1} J_2 \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 - 2 \psi_2 - \psi_3] + \\
& 0.06874172533228502 \, \sqrt{J_1} J_2 \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 + 2 \psi_2 - \psi_3] + 540.274930270464 \, J_1 J_3 \sin[2 \psi_3] + \\
& 0.0001262411217897126 \, J_2 J_3 \sin[2 \psi_3] + 0.006397411195118074 \, J_3^2 \sin[2 \psi_3] - \\
& 0.0008344335996327272 \, J_3^2 \sin[4 \psi_3] - 2604.2751346650175 \, J_1^{3/2} \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 + \psi_3] - \\
& 0.0012168768691671876 \, \sqrt{J_1} J_2 \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 + \psi_3] - \\
& 0.09398148925626898 \, \sqrt{J_1} J_3^{3/2} \sin[\psi_1 + \psi_3] + \\
& 292.21174683713804 \, J_1^{3/2} \sqrt{J_3} \sin[3 \psi_1 + \psi_3] + 0.06717324102639147 \, \sqrt{J_1} J_2 \\
& \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 - 2 \psi_2 + \psi_3] - 0.0687207459577229 \, \sqrt{J_1} J_2 \sqrt{J_3} \sin[\psi_1 + 2 \psi_2 + \psi_3] - \\
& 3.976501784474247 \, J_1 J_3 \sin[2 \psi_1 + 2 \psi_3] + 0.00015945169498280897 \, J_2 J_3 \sin[2 \psi_2 + 2 \psi_3] + \\
& 0.03141277734381444 \, \sqrt{J_1} J_3^{3/2} \sin[\psi_1 + 3 \psi_3]
\end{aligned}$$

FIG. F.2 – Générateur du 2ème ordre de l'Hamiltonien développé au 3ème ordre et exprimé en coordonnées angle-action (J_i, ψ_i).

**EXPRESSIONS RELATIVES À
L'HAMILTONIEN DÉVELOPPÉ AU
QUATRIÈME ORDRE AUTOUR DE
L'ÉQUILIBRE DU MODÈLE DE BASE**

$$\begin{aligned}
H_{o4} = & 0.3962338877114732 \sqrt{J_1} + 21507.137215030776 \sqrt{J_1^2} + \\
& 0.010759082764977102 \sqrt{J_2} + 0.031213999384858696 \sqrt{J_1 J_2} - 0.0004624419031643595 \sqrt{J_2^2} + \\
& 0.005899446770901635 \sqrt{J_3} + 3.1285000233748486 \sqrt{J_1 J_3} - 0.001019582593695306 \sqrt{J_2 J_3} - \\
& 0.00017436096205778514 \sqrt{J_3^2} + 75.37911851776454 \sqrt{J_1^{3/2}} \cos[\psi_1] + \\
& 0.0001056608563460823 \sqrt{J_1 J_2} \cos[\psi_1] + 0.005354704842505392 \sqrt{J_1 J_3} \cos[\psi_1] - \\
& 28675.692644208815 \sqrt{J_1^2} \cos[2 \psi_1] - 0.03120683965045044 \sqrt{J_1 J_2} \cos[2 \psi_1] - \\
& 3.1284388063026105 \sqrt{J_1 J_3} \cos[2 \psi_1] - 75.37138810330872 \sqrt{J_1^{3/2}} \cos[3 \psi_1] + \\
& 7168.555466882603 \sqrt{J_1^2} \cos[4 \psi_1] + 0.011662614048625859 \sqrt{J_1 J_2} \cos[\psi_1 - 2 \psi_2] - \\
& 0.034865583782557344 \sqrt{J_1 J_2} \cos[2 \psi_1 - 2 \psi_2] + 0.06905117837112053 \sqrt{J_1 J_2} \cos[2 \psi_2] - \\
& 0.00026099048002797246 \sqrt{J_2^2} \cos[2 \psi_2] - 0.000053003213132437 \sqrt{J_2 J_3} \cos[2 \psi_2] - \\
& 0.000018852283189615965 \sqrt{J_2^2} \cos[4 \psi_2] - 0.011528629323663761 \sqrt{J_1 J_2} \cos[\psi_1 + 2 \psi_2] - \\
& 0.0341869015914197 \sqrt{J_1 J_2} \cos[2 \psi_1 + 2 \psi_2] + 0.006467913674412305 \sqrt{J_1} \\
& \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[\psi_1 - 3 \psi_3] - 0.0027500110037904165 \sqrt{J_1 J_3} \cos[\psi_1 - 2 \psi_3] + \\
& 1.5936845588070017 \sqrt{J_1 J_3} \cos[2 \psi_1 - 2 \psi_3] - 1.7370137367425382 \sqrt{J_1} \sqrt{J_2} \cos[2 \psi_2 - 2 \psi_3] - \\
& 7.941274955014871 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 - \psi_3] - \\
& 523.65473736649295 \sqrt{J_1^{3/2}} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 - \psi_3] - 0.000244614937585239 \sqrt{J_1} \\
& \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 - \psi_3] - 0.01882285082041367 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[\psi_1 - \psi_3] - \\
& 0.9105937554279929 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos[2 \psi_1 - \psi_3] + 174.5454763838005 \sqrt{J_1^{3/2}} \sqrt{J_3} \cos[3 \psi_1 - \psi_3] - \\
& 0.00015513504938237185 \sqrt{J_1 J_2} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 - 2 \psi_2 - \psi_3] + \\
& 1.747408504396602 \sqrt{J_1} \sqrt{J_2} \sqrt{J_3} \cos[2 \psi_2 - \psi_3] - \\
& 0.00015513488936826138 \sqrt{J_1 J_2} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 + 2 \psi_2 - \psi_3] - \\
& 0.013968316657385633 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos[\psi_3] + 0.00007001928282224075 \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[\psi_3] - \\
& 3.1874260486107486 \sqrt{J_1 J_3} \cos[2 \psi_3] - 7.825851692154994 \sqrt{J_2 J_3} \cos[2 \psi_3] - \\
& 0.00003733463236669435 \sqrt{J_3^2} \cos[2 \psi_3] - 6.482914452686937 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[3 \psi_3] + \\
& 9.84564380597843 \sqrt{J_3^2} \cos[4 \psi_3] - 8.180714894102106 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 + \psi_3] + \\
& 523.6551444837838 \sqrt{J_1^{3/2}} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 + \psi_3] + 0.0002447543454833148 \sqrt{J_1} \\
& \sqrt{J_2} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 + \psi_3] + 0.01881880772914244 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[\psi_1 + \psi_3] + \\
& 0.9245620799497177 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3} \cos[2 \psi_1 + \psi_3] - 174.5458832037287 \sqrt{J_1^{3/2}} \sqrt{J_3} \cos[3 \psi_1 + \psi_3] + \\
& 0.0001551387389889069 \sqrt{J_1 J_2} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 - 2 \psi_2 + \psi_3] - \\
& 1.747408504396602 \sqrt{J_1} \sqrt{J_2} \sqrt{J_3} \cos[2 \psi_2 + \psi_3] + \\
& 0.00015513857897479644 \sqrt{J_1 J_2} \sqrt{J_3} \cos[\psi_1 + 2 \psi_2 + \psi_3] - \\
& 0.002834901351042553 \sqrt{J_1 J_3} \cos[\psi_1 + 2 \psi_3] + 1.5936870100735727 \sqrt{J_1 J_3} \cos[2 \psi_1 + 2 \psi_3] + \\
& 7.548163937646298 \sqrt{J_2 J_3} \cos[2 \psi_2 + 2 \psi_3] - \\
& 0.006467909798262344 \sqrt{J_1} \sqrt{J_3^{3/2}} \cos[\psi_1 + 3 \psi_3]
\end{aligned}$$

FIG. G.1 – Hamiltonien développé au 4ème ordre et exprimé en coordonnées angle-action (J_i , ψ_i).

$$\begin{aligned}
W1 = & 190.23895411838689 \sqrt{J1}^{3/2} \sin[\psi1] + \\
& 0.00026666284642222043 \sqrt{J1} J2 \sin[\psi1] + 0.013513999861039018 \sqrt{J1} J3 \sin[\psi1] - \\
& 36185.3124555499 \sqrt{J1}^2 \sin[2 \psi1] - 0.039379317514308246 \sqrt{J1} J2 \sin[2 \psi1] - \\
& 3.9477173726938077 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi1] - 63.40648146423441 \sqrt{J1}^{3/2} \sin[3 \psi1] + \\
& 4522.932063801486 \sqrt{J1}^2 \sin[4 \psi1] + 0.031123898353473626 \sqrt{J1} J2 \sin[\psi1 - 2 \psi2] - \\
& 0.04522420616181381 \sqrt{J1} J2 \sin[2 \psi1 - 2 \psi2] + 3.208971457451723 \sqrt{J1} J2 \sin[2 \psi2] - \\
& 0.012128844332230023 \sqrt{J1}^2 \sin[2 \psi2] - 0.0024631845625814087 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi2] - \\
& 0.0004380550740576092 \sqrt{J1}^2 \sin[4 \psi2] - 0.027596822646856728 \sqrt{J1} J2 \sin[\psi1 + 2 \psi2] - \\
& 0.04199937638604832 \sqrt{J1} J2 \sin[2 \psi1 + 2 \psi2] + \\
& 0.01708667388674882 \sqrt{J1} J3^{3/2} \sin[\psi1 - 3 \psi3] - \\
& 0.007158239423881708 \sqrt{J1} J3 \sin[\psi1 - 2 \psi3] + 2.0414346932075595 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi1 - 2 \psi3] - \\
& 0.00017871850141079192 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi2 - 2 \psi3] - \\
& 1341.5540469842451 \sqrt{J1}^{3/2} \sqrt{J3} \sin[\psi1 - \psi3] - 0.0006266750250886239 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 - \psi3] - \\
& 0.04822236387111228 \sqrt{J1} J3^{3/2} \sin[\psi1 - \psi3] - \\
& 1.157874084025761 \sqrt{J1} \sqrt{J3} \sin[2 \psi1 - \psi3] + 147.56945558946825 \sqrt{J1}^{3/2} \sqrt{J3} \sin[3 \psi1 - \psi3] - \\
& 0.0004206294648476698 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 - 2 \psi2 - \psi3] - \\
& 0.000376675611985155 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 + \psi2 - \psi3] + \\
& 1.1243866068135841 \sqrt{J1}^8 J2 \sqrt{J3} \sin[2 \psi2 - \psi3] - \\
& 2.3157448733009836 \sqrt{J1} \sqrt{J3} \sin[\psi3] - 270.1461823794404 \sqrt{J1} J3 \sin[\psi3] + \\
& 0.011869671549528702 \sqrt{J1}^{3/2} \sin[\psi3] - 0.00006632699481537823 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi3] - \\
& 0.0031642487906241613 \sqrt{J1}^2 \sin[2 \psi3] - 3.983996602113187 \sqrt{J1}^{3/2} \sin[3 \psi3] + \\
& 0.00041722739875083833 \sqrt{J1}^2 \sin[4 \psi3] + 1302.1928644853501 \sqrt{J1}^{3/2} \sqrt{J3} \sin[\psi1 + \psi3] + \\
& 0.0006086346536501964 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 + \psi3] + \\
& 0.04679742979726025 \sqrt{J1} J3^{3/2} \sin[\psi1 + \psi3] + 1.1578741286262075 \sqrt{J1} \sqrt{J3} \sin[2 \psi1 + \psi3] - \\
& 146.11227756597972 \sqrt{J1}^{3/2} \sqrt{J3} \sin[3 \psi1 + \psi3] + \\
& 0.0004075998335336523 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 - 2 \psi2 + \psi3] - \\
& 6.405181456725818 \sqrt{J1}^9 J2 \sqrt{J3} \sin[2 \psi2 + \psi3] + \\
& 0.0003661937218154368 \sqrt{J1} J2 \sqrt{J3} \sin[\psi1 + 2 \psi2 + \psi3] - \\
& 0.006943154115784765 \sqrt{J1} J3 \sin[\psi1 + 2 \psi3] + 1.981540561813183 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi1 + 2 \psi3] + \\
& 0.00002265553233969472 \sqrt{J1} J3 \sin[2 \psi2 + 2 \psi3] - \\
& 0.015625528165763996 \sqrt{J1} J3^{3/2} \sin[\psi1 + 3 \psi3]
\end{aligned}$$

FIG. G.2 – Générateur du 1er ordre de l'Hamiltonien développé au 4ème ordre et exprimé en coordonnées angle-action (J_i, ψ_i) .

ANNEXE **H**

**EXPRESSION RELATIVE AU MODÈLE
ADIABATIQUE**

$$\begin{aligned}
K02 = & 39.126426747807784 \cdot x_1^2 + 0.0020138598660955744 \cdot e \eta^2 - \\
& 0.004423299348745637 \cdot e^3 \eta^2 + 0.0003477358934326712 \cdot e \eta^1 \eta^3 - \\
& 0.0007637770516467599 \cdot e^3 \eta^1 \eta^3 + 0.00114648821213973 \cdot \eta^3^2 + \\
& 0.0020213653773632147 \cdot e \eta^3^2 + 0.0017197323182095944 \cdot e^2 \eta^3^2 - \\
& 0.004439784668137063 \cdot e^3 \eta^3^2 + 0.000030022001048244365 \cdot e x_1^2 \cos[i_0] - \\
& 0.00006594118087382308 \cdot e^3 x_1^2 \cos[i_0] - 0.00046364785413066125 \cdot e x_1 x_3 \cos[i_0] + \\
& 0.001018369338941314 \cdot e^3 x_1 x_3 \cos[i_0] + 0.001342573249535914 \cdot e x_3^2 \cos[i_0] - \\
& 0.0029488662445163833 \cdot e^3 x_3^2 \cos[i_0] + 0.002655124475971635 \cdot e \eta^1^2 \cos[i_0] - \\
& 0.005831791259723414 \cdot e^3 \eta^1^2 \cos[i_0] - 1.727980412344367 \cdot e \eta^1 \eta^3 \cos[i_0] + \\
& 3.795385548542093 \cdot e \eta^1 \eta^3 \cos[i_0] + 0.001322558574710998 \cdot e \eta^3^2 \cos[i_0] - \\
& 0.002904905440883084 \cdot e^3 \eta^3^2 \cos[i_0] + 0.000050826933073663735 \cdot x_1^2 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.000029649043380937328 \cdot e x_1^2 \cos[i_0]^2 + 0.00007624039726526783 \cdot e^2 x_1^2 \cos[i_0]^2 - \\
& 0.00006512200599741638 \cdot e^3 x_1^2 \cos[i_0]^2 - 0.0007829758843019248 \cdot x_1 x_3 \cos[i_0]^2 - \\
& 0.00045673593250945615 \cdot e x_1 x_3 \cos[i_0]^2 - 0.0011744638264528865 \cdot e^2 x_1 x_3 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.0010031878517618416 \cdot e^3 x_1 x_3 \cos[i_0]^2 + 0.0022500878353689246 \cdot x_3^2 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.00131255123729854 \cdot e x_3^2 \cos[i_0]^2 + 0.003375131753053386 \cdot e^2 x_3^2 \cos[i_0]^2 - \\
& 0.0028829250390664347 \cdot e^3 x_3^2 \cos[i_0]^2 - 0.000017027566100120385 \cdot \eta^1^2 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.0006414137962268505 \cdot e \eta^1^2 \cos[i_0]^2 - 0.000025541349150180466 \cdot e^2 \eta^1^2 \cos[i_0]^2 - \\
& 0.0014088195881411176 \cdot e^3 \eta^1^2 \cos[i_0]^2 - 0.00034600791302032683 \cdot e \eta^1 \eta^3 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.0007599816660982179 \cdot e^3 \eta^1 \eta^3 \cos[i_0]^2 + 0.001137910494357623 \cdot \eta^3^2 \cos[i_0]^2 - \\
& 0.0006687847904148423 \cdot e \eta^3^2 \cos[i_0]^2 + 0.0017068657415364346 \cdot e^2 \eta^3^2 \cos[i_0]^2 + \\
& 0.0014689380218040292 \cdot e^3 \eta^3^2 \cos[i_0]^2 - 0.00016208718678299334 \cdot e x_1^2 \sin[i_0] + \\
& 0.0003560129281126461 \cdot e^3 x_1^2 \sin[i_0] + 0.0018667593977664157 \cdot e x_1 x_3 \sin[i_0] - \\
& 0.004100203677236947 \cdot e^3 x_1 x_3 \sin[i_0] + 0.00012332653769520273 \cdot e x_3^2 \sin[i_0] - \\
& 0.00027087793100910595 \cdot e^3 x_3^2 \sin[i_0] + 0.00040874026216341987 \cdot e \eta^1^2 \sin[i_0] - \\
& 0.0008977687901089401 \cdot e^3 \eta^1^2 \sin[i_0] + 0.0038185399643250635 \cdot e \eta^1 \eta^3 \sin[i_0] - \\
& 0.008387150278785407 \cdot e^3 \eta^1 \eta^3 \sin[i_0] + 0.0003682946896312989 \cdot e \eta^3^2 \sin[i_0] - \\
& 0.000808932979011603 \cdot e^3 \eta^3^2 \sin[i_0] - 0.00026535462847074705 \cdot x_1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - \\
& 0.0001547901999412688 \cdot e x_1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - 0.00039803194270612066 \cdot \\
& e^2 x_1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.00033998561772814376 \cdot e^3 x_1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + \\
& 0.0029829382497320043 \cdot x_1 x_3 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.00174004731234367 \cdot e x_1 \\
& x_3 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.004474407374598005 \cdot e^2 x_1 x_3 \cos[i_0] \sin[i_0] - \\
& 0.003821889632469132 \cdot e^3 x_1 x_3 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.0010492091856233877 \cdot \\
& x_3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.000612038691613643 \cdot e x_3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + \\
& 0.001573813778435082 \cdot e^2 x_3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - 0.0013442992690799664 \cdot \\
& e^3 x_3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.00013658763614115792 \cdot \eta^1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + \\
& 0.0004044739865914773 \cdot e \eta^1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.00020488145421173695 \cdot \\
& e^2 \eta^1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - 0.000888398220549138 \cdot e^3 \eta^1^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + \\
& 0.0037337832743029784 \cdot e \eta^1 \eta^3 \cos[i_0] \sin[i_0] - 0.008200988263201186 \cdot \\
& e^3 \eta^1 \eta^3 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.00035034879728331966 \cdot \eta^3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - \\
& 0.00012286690903991226 \cdot e \eta^3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.0005255231959249795 \cdot \\
& e^2 \eta^3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] + 0.0002698683894983787 \cdot e^3 \eta^3^2 \cos[i_0] \sin[i_0] - \\
& 0.000050826933073663735 \cdot x_1^2 \sin[i_0]^2 - 0.000029649043380937328 \cdot e x_1^2 \sin[i_0]^2 - \\
& 0.00007624039726526783 \cdot e^2 x_1^2 \sin[i_0]^2 + 0.00006512200599741638 \cdot e^3 x_1^2 \sin[i_0]^2 + \\
& 0.0007829758843019248 \cdot x_1 x_3 \sin[i_0]^2 + 0.00045673593250945615 \cdot e x_1 x_3 \sin[i_0]^2 + \\
& 0.0011744638264528865 \cdot e^2 x_1 x_3 \sin[i_0]^2 - 0.0010031878517618416 \cdot e^3 x_1 x_3 \sin[i_0]^2 - \\
& 0.0022500878353689246 \cdot x_3^2 \sin[i_0]^2 - 0.00131255123729854 \cdot e x_3^2 \sin[i_0]^2 - \\
& 0.003375131753053386 \cdot e^2 x_3^2 \sin[i_0]^2 + 0.0028829250390664347 \cdot e^3 x_3^2 \sin[i_0]^2 + \\
& 0.000017027566100120385 \cdot \eta^1^2 \sin[i_0]^2 - 0.0006414137962268505 \cdot e \eta^1^2 \sin[i_0]^2 + \\
& 0.000025541349150180466 \cdot e^2 \eta^1^2 \sin[i_0]^2 + 0.0014088195881411176 \cdot e^3 \eta^1^2 \sin[i_0]^2 + \\
& 0.00034600791302032683 \cdot e \eta^1 \eta^3 \sin[i_0]^2 - 0.0007599816660982179 \cdot e^3 \eta^1 \eta^3 \sin[i_0]^2 - \\
& 0.001137910494357623 \cdot \eta^3^2 \sin[i_0]^2 + 0.0006687847904148423 \cdot e \eta^3^2 \sin[i_0]^2 - \\
& 0.0017068657415364346 \cdot e^2 \eta^3^2 \sin[i_0]^2 - 0.0014689380218040292 \cdot e^3 \eta^3^2 \sin[i_0]^2
\end{aligned}$$

FIG. H.1 – Hamiltonien développé au 2ème ordre en η_i , x_i . L'excentricité e ou l'inclinaison i_0 étant considérées comme des fonctions lentes du temps.

ANNEXE I

EXPRESSION DE α' ET β' LORSQUE L'EXCENTRICITÉ OU L'INCLINAISON SONT DES FONCTIONS LENTES DU TEMPS

$$\alpha' = \frac{\left((dRR \, dsr + dSR \, dss)^2 \left(drr^2 \, dRR^3 + 2 \, drr \, dRR \, (2 \, dSR \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) - dRR \, dss \, dSS) + dRR \, dSS \right. \right. \\ \left. \left. + (4 \, dsr \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) + dss^2 \, dSS) + \right. \right. \\ \left. \left. drr \, dRR^2 \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \, dRR \, dsr \, dSR \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \, dSR^2 \, dss \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. dRR \, dss \, dSS \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} \right) \right) / \\ \left((4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2) \right. \\ \left. (drr^2 \, dRR^2 \, dss + 2 \, drr \, dss \, (2 \, dSR \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) - dRR \, dss \, dSS) + \right. \\ \left. dss \, dSS \, (4 \, dsr \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) + dss^2 \, dSS) + \right. \\ \left. 2 \, dRR \, dsr^2 \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \right. \\ \left. drr \, dRR \, dss \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \right. \\ \left. 2 \, dsr \, dSR \, dss \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \right. \\ \left. dss^2 \, dSS \sqrt{4 \, (dRR \, dsr + dSR \, dss) \, (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} \right) \Big)^{1/4}$$

FIG. I.1 – Expression de α' (voir éq. (10.80)) où tous les coefficients sont des fonctions de e et $\sin i_o$.

$$\begin{aligned}
\beta' = & \left(\left(4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2 \right) \right. \\
& (drr^2 \, dRR^3 + 2 \, drr \, dRR (2 \, dSR (dRR \, dsr + dSR \, dss) - dRR \, dss \, dSS) + \\
& dRR \, dSS (4 \, dsr (dRR \, dsr + dSR \, dss) + dss^2 \, dSS) - \\
& drr \, dRR^2 \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \\
& 2 \, dRR \, dsr \, dSR \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \\
& 2 \, dSR^2 \, dss \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \\
& \left. dRR \, dss \, dSS \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} \right) / \\
& \left((dRR \, dsr + dSR \, dss)^2 (drr^2 \, dRR^2 \, dss + 2 \, drr \, dss (2 \, dSR (dRR \, dsr + dSR \, dss) - dRR \, dss \, dSS) + \right. \\
& dss \, dSS (4 \, dsr (dRR \, dsr + dSR \, dss) + dss^2 \, dSS) - \\
& 2 \, dRR \, dsr^2 \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} + \\
& drr \, dRR \, dss \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \\
& 2 \, dsr \, dSR \, dss \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} - \\
& \left. dss^2 \, dSS \sqrt{4 (dRR \, dsr + dSR \, dss) (drr \, dSR + dsr \, dSS) + (drr \, dRR - dss \, dSS)^2} \right) \Big)^{1/4}
\end{aligned}$$

FIG. I.2 – Expression de β' (voir éq. (10.80)) où tous les coefficients sont des fonctions de e et $\sin i_o$.

Bibliographie

- [1] Anderson, J.D., Colombo, G., Esposito, P.B., Lau, E.L., & Trager, G.B. 1987, *Icarus* **71**, 337.
- [2] Beletskii, V.V., 1972, *Celestial Mechanics*, **6**, 356.
- [3] Beletsky, V.V., 2000, in : *Essays on the motion of celestial bodies*.
- [4] Bretagnon, P., 1982, *Astronomy and Astrophysics* **114**, 278-288.
- [5] Bretagnon, P., 1990, *Astronomy and Astrophysics* **231**, 561-570.
- [6] Bretagnon, P., 1996, in : *Dynamics, ephemerides, and astrometry of the solar system : proceedings of the 172nd Symposium of the International Astronomical Union, held in Paris, France, 38 July, 1995* , 17.
- [7] Bretagnon, P., 1997, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **65**, 95-106.
- [8] Brouwer, D., Clemence, G. M., 1961, in : *Planets and Satellites*, Kuiper G. P. and Middlehurst B. M. (eds.).
- [9] Burns, T. J., 1979, *Celestial Mechanics*, **19**, 297-313.
- [10] Celletti, A., 1990a, *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Physik*, **41**, 174-204.
- [11] Celletti, A., 1990b, *Zeitschrift fuer angewandte Mathematik und Physik*, **41**, 453-479.
- [12] Celletti, A., Chierchia, L., 1998, *Planetary and Space Science*, **46**, 1433-1440.
- [13] Celletti, A., Chierchia, L., 2000, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **76**, 229-240.
- [14] Celletti, A., Falcolini, C., 1992, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **53**, 113-127.
- [15] Celletti, A., Froeschlé, C., Lega, E., 2007, *Planetary and Space Science*, **55**, 889-899.
- [16] Colombo, G., 1965, *Nature*, **208**, 575.
- [17] Colombo, G. 1966, *Astronomical Journal*, **71**, 891.
- [18] Correia, A., Laskar J., 2004, *Nature*, **429**, 848-850.

- [19] Deprit, A., 1967, *American Journal of Physics*, **35** (5), 424–428.
- [20] D’Hoedt, S., Lemaître, A., 2004, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **89**, 267-283.
- [21] D’Hoedt, S., Lemaître, A., 2005, in : Transits of Venus : New Views of the Solar System and Galaxy, Proceedings of IAU Colloquium 196, held 7-11 June, 2004 in Preston, U.K., D.W., Kurtz & G.E. Bromage (eds.), 263-270.
- [22] D’Hoedt, S., Lemaître, A., 2006, *Lecture Notes in Physics*, **682**, 169.
- [23] D’Hoedt, S., Lemaître, A., Rambaux, N., 2007, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **96**, 253-258.
- [24] Dufey, J., Lemaître, A., D’Hoedt S., 2006, in : Workshop on the Rotation of Celestial Bodies, 1-2/12/05, Namur, A. Lemaître (ed.).
- [25] Ferraz-Mello, S., Tsuchida, M., Klafke, J. C., 1993, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **55**, 25-45.
- [26] Goldreich, P., Peale, S. 1966, *Astronomical Journal*, **71**, 425.
bibitemgoldtoomreGoldreich, P., Toomre, A. 1969, *J. Geophys. Res.*, **74**, 2555 - 2567.
- [27] Gauchez, D., Souchay, J., 2006, *Icarus*, **185**, 83-96.
- [28] Henrard, J., 2005, in : *Hamiltonian Dynamics : theory and applications* ed. Giorgilli, Springer.
- [29] Henrard, J., Lemaître, A., 1983, *Celestial Mechanics*, **30**, 197-218.
- [30] Henrard, J., Lemaître, A., 2005, *The Astronomical Journal*, **130**, 2415-2417.
- [31] Henrard, J., Murigande, C., 1987, *Celestial Mechanics*, **40**, 345-366.
- [32] Henrard, J., Schwanen, G., 2004, *Celestial Mechanics*, **89**, 181-200.
- [33] Kaula, W. M., 1966 in : *Theory of satellite geodesy. Applications of satellites to geodesy*, Blaisdell Publishing Company.
- [34] Kinoshita, H., 1972, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **24**, 423–457.
- [35] Kinoshita, H., 1977, *Celestial Mechanics*, **15**, 277–326.
- [36] Laskar, J., 1985, *Astronomy and Astrophysics* **157**, 59-70.
- [37] Lemaître, A., D’Hoedt, S., and Rambaux, N., 2006, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **95**, 213-224.
- [38] Margot, J.-L., Peale, S.J., Jurgens, R. F., Slade, M. A., Holin, I. V., 2003 in : *Mercury, 25th meeting of the IAU, Joint Discussion 2, 16 July, 2003, Sydney, Australia*.

- [39] Margot, J.-L., Peale, S.J., Jurgens, R. F., Slade, M. A., Holin, I. V., 2007 *Science*, **316**, 710.
- [40] Milani, A., Vokrouhlický, D., Bonanno, C., 2001, *Planet. Space Sci.*, **49**, 1579.
- [41] Moisson, X., Bretagnon, P., 2001, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **80**, 205-213.
- [42] Peale, S.J., 1969, *Astronomical Journal*, **74**, 483.
- [43] Peale, S.J. 1974, *Astronomical Journal*, **79**, 72.
- [44] Peale, S.J. 1976, *Nature*, **262**, 765-766.
- [45] Peale, S.J., 2005, *Icarus*, **178**, 4-18.
- [46] Peale, S.J., 2006, *Icarus*, **181**, 338-347.
- [47] Pettengill, G.H., & Dyce R.B., 1965, *Nature*, **206**, 1240.
- [48] Quinn, T. R., & Tremaine, S. ; Duncan, M., 1965, *Astronomical Journal* **101**, 2287-2305.
- [49] Rambaux, N., Bois, E., 2004, *Astronomy and Astrophysics* **413**, 381.
- [50] (a) Rambaux, N., Van Hoolst, T., Dehant, V., Bois, E., 2007, *Astronomy and Astrophysics*, **468**, 711-719.
- [51] (b) Rambaux, N., Lemaître, A., D’Hoedt, S., 2007, *Astronomy and Astrophysics*, **470**, 741-747.
- [52] Simon, J. L., Bretagnon, P., Chapront, J., Chapront-Touze, M., Francou, G., Laskar, J., 1994, *Astronomy and Astrophysics* **282**, 663-683.
- [53] Yseboodt, M., Margot, J. L., 2005, *Bulletin of the American Astronomical Society*, **37**, 523.

